Correction de l'interrogation de mathématiques

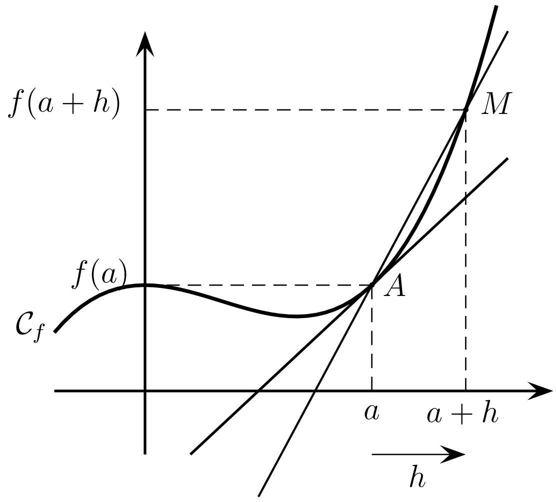
1. On dit que f est dérivable en a lorsque la limite du taux de variation $\tau(h)$:

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

lorsque h tend vers 0 existe.
Cette limite est alors le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$:

$$\lim_{h\to 0} \tau(h) = f'(a)$$

Le taux de variation $\tau(h)$ est le coefficient directeur de la sécante (AM).



2. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, donc on a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x+1$ donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = x-3$ donc $v'(x) = 1$ et alors $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ soit, $f'(x) = \dfrac{2(x-3)-(2x+1)1}{(x-3)^2} = \dfrac{-7}{(x-3)^2}$
On a alors le tableau de signe, puis de variation :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
-7		$-$	|	$-$	
$(x-3)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f		$\searrow$	||	$\searrow$	

3. a) $f(x) = 4x - 1 + \dfrac{2}{2x+1}$ donc on a $f = u2 \times \dfrac{1}{v}$ avec $u(x) = 4x-1$ donc $u'(x) = 4$ et $v(x) = 2x+1$ donc $v'(x) = 2$ et ainsi $f' = u' + 4 \times \dfrac{-v'}{v^2}$ soit $f'(x) = 4 - \dfrac{4}{(2x+1)^2} = \dfrac{16x^2+16x}{(2x+1)^2} = \dfrac{16x(x+1)}{(2x+1)^2}$
Le numérateur, $16x(x+1) = 16x^2 + 16x$ est un trinôme du second degré de racines évidentes 0 et -1, et on peut alors dresser le tableau de signe, puis de variation :

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		0		$+\infty$
$16x(x+1)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(2x+1)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-7	$\searrow$	||	$\searrow$	1	$\nearrow$	

b) La tangente est parallèle à D lorsque son coefficient directeur $f'(x)$ est égal à celui de D, donc lorsque $f'(x) = 3$, soit

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 - \frac{4}{(2x+1)^2} = 3 \iff \frac{4}{(2x+1)^2} = 1 \\ &\iff (2x+1)^2 = 4 \iff \left\{\begin{array}{l} 2x+1 = 2 \\ 2x+1 = -2 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} x = 1/2 \\ x = -3/2 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Il y a donc deux tels points : $A\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, soit $A\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ et $B\left(-3/2; f\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$ soit $B\left(-\frac{3}{2}; -8\right)$.