Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{x^2+3}{4x+1}$.

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $\left\{\begin{array}{ll} u(x) & = x^2+3 \\ v(x) & = 4x+1 \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{ll} u'(x) & = 2x \\ v'(x) & = 4 \end{array}\right.$

On a donc, $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, soit $f'(x) = \dfrac{2x(4x+1) - (x^2+3) \times 4}{(4x+1)^2} = \dfrac{4x^2+2x-12}{(4x+1)^2}$

Le trinôme du numérateur a pour discriminant : $\Delta = 2^2 + 4 \times 4 \times (-12) = 196 = 14^2 > 0$, et admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{-2-14}{2 \times 4} = -2$ et $x_1 = \dfrac{-2+14}{2 \times 4} = \dfrac{3}{2}$.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2+2x-12$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(4x+1)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-1	↘	‖	↘	$\frac{3}{4}$	↗	

- $f(-2) = \dfrac{(-2)^2+3}{4 \times (-2) + 1} = -1$
- $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 3}{4 \times \left(\dfrac{3}{2}\right) + 1} = \dfrac{\dfrac{21}{4}}{7} = \dfrac{3}{4}$

Exercice 2 $f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x} - (-x+2) = \dfrac{x^2-2x+1}{x} = \dfrac{(x-1)^2}{x}$.

Comme pour tout réel x, $(x-1)^2 \geqslant 0$, on a :

- $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty;0[$
- $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$
- $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent au point d'abscisse 1.

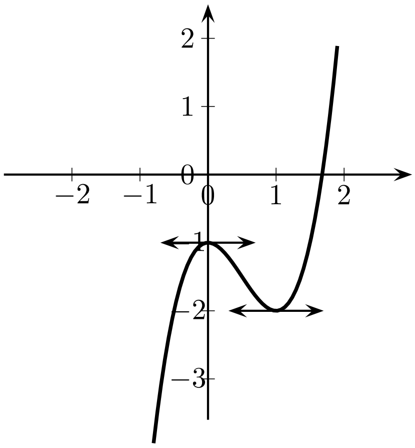
Exercice 3

1. a. Pour tout x réel,

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1) .$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	-1	↘	-2	↗	

b.



2. a. On a $f(1) = -2 < 0$ et $f(2) = 3 > 0$. De plus, f est dérivable, strictement croissante sur $[1;2]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[1;2]$ une unique solution α.

De plus, sur $]-\infty;1]$, le maximum de f est $-1 < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution. Enfin, sur $[2;+\infty[$, f est dérivable et strictement croissante avec $f(2) = 3 > 0$, et donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $[2;+\infty[$.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et $\alpha \in [1;2]$.

b. Avec la calculatrice (un tableau de valeurs, ou par dichotomie), on trouve $1,67 < \alpha < 1,68$.

c. On en déduit le signe de $f(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3. a. Pour tout nombre $x \neq -1$, $g'(x) = \dfrac{-1 \times (1+x^3) - (1-x) \times 3x^2}{(1+x^3)^2} = \dfrac{f(x)}{(1+x^3)^2}$

b.

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(1+x^3)^2$		$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$g'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	

Exercice 4

1. $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2$ donc $u'(x) = 2x$, et $v(x) = 2(x-1) = 2x - 2$ donc $v'(x) = 2$.

   Ainsi $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, soit $f'(x) = \dfrac{2x \times 2(x-1) - x^2 \times 2x}{[2(x-1)]^2} = \dfrac{2x^2 - 4x}{4(x-1)^2} = \dfrac{2x(x-2)}{4(x-1)^2}$.

x	1		2		$+\infty$
$2x(x-2)$		$-$	0	$+$	
$4(x-1)^2$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

2. $T : y = f'(3)(x-3) + f(3)$, avec $f(3) = \dfrac{3^2}{2(3-1)} = \dfrac{9}{4}$ et $f'(3) = \dfrac{2 \times 3(3-2)}{4(3-1)^2} = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$,

   donc $T : y = \dfrac{3}{8}(x-3) + \dfrac{9}{4} = \dfrac{3}{8}x + \dfrac{9}{8}$.

3. Soit, comme N appartient à l'axe des ordonnées, $N(0; y)$. Comme $N \in (AM)$, $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires. Or $\overrightarrow{AM}(x-1; -1)$ et $\overrightarrow{AN}(-1; y-1)$, et donc

$$N \in (AM) \iff (x-1) \times (y-1) - (-1) \times -1 = 0 \iff y = \frac{1}{x-1} + 1 = \frac{x}{x-1}$$

   Ainsi, $N\left(0; \dfrac{x}{x-1}\right)$.

4. L'aire de OMN est $\dfrac{1}{2}OM \times ON = \dfrac{1}{2}x \times \dfrac{x}{x-1} = f(x)$.

5. D'après la question 1., l'aire minimale est 2 lorsque $x = 2$.

Exercice 5 $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et l'équation de T_a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, soit $y = -\dfrac{1}{a^2}(x-a) + \dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$.

T_a coupe l'axe des abscisses en $B\,(x_B; 0)$ avec $0 = -\dfrac{1}{a^2}x_B + \dfrac{2}{a} \iff x_B = 2a$. Ainsi, $B(2a; 0)$.

T_a coupe l'axe des ordonnées en $C\,(0; y_C)$ avec $y_C = -\dfrac{1}{a^2} \times 0 + \dfrac{2}{a}$, d'où, $y_c = \dfrac{2}{a}$. Ainsi, $C\left(0; \dfrac{2}{a}\right)$

Les coordonnées du milieu$I$ de $[BC]$ sont alors $x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{2a+0}{2} = a$ et $y_I = \dfrac{y_B + y_c}{2} = \dfrac{0 + \frac{2}{a}}{2} = \dfrac{1}{a}$,

soit $I\left(a; \dfrac{1}{a}\right)$, c'est-à-dire les coordonnées du point A.