Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 $\quad 2+\dfrac{3}{x-4} \geqslant \dfrac{1}{2-x} \iff \dfrac{-2x^2+8x-6}{(x-4)(2-x)} \geqslant 0 \iff \dfrac{-x^2+4x-3}{(x-4)(2-x)} \geqslant 0.$

Le trinôme du 2nd degré au numérateur a un discriminant $\Delta = 4 = 2^2 > 0$ et admet donc deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$.

Le trinôme du 2nd degré du dénominateur a comme racines évidentes 2 et 4.

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$-x^2+4x-3$		-	0	+	|	+	0	$-$	|	$-$	
$(x-4)(2-x)$		-	|	-	0	+	|	+	0	-	
$\dfrac{-x^2+4x-3}{(x-4)(2-x)}$		+	0	-	‖	+	0	-	‖	+	

Ainsi, $\mathcal{S} =]-\infty;1]\cup]2;3]\cup]4;+\infty[$.

Exercice 2 $\quad$ On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

1. $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ et donc 1 est bien une racine de P.
2. $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ et donc $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) \iff$
$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b - a = -6 \\ c - b = 11 \\ -c = -6 \end{array}\right.$.
On trouve donc $a = 1$, $b = -5$ et $c = 6$, ou encore $P(x) = (x-1)(x^2-5x+6)$.
3. $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 1 > 0$ et admet donc deux racines $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. On a alors le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		-	0	+	|	+	0	+	
$Q(x)$		+	|	+	0	-	0	+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	|	+	

On a alors $P(x) \geqslant 0 \iff x \in [1;2] \cup [3;+\infty[$.

Exercice 3 $\quad$ Si $M(x;y)$ est un éventuel point d'intersection, alors $y = f(x) = g(x)$, soit donc l'équation $(E) : 2x^2 + mx = x^2 + 3x - m \iff x^2 + (m-3)x + m = 0$.

Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = (m-3)^2 - 4m = m^2 - 10m + 9$.

On veut que (E) ait une unique solution, donc que $\Delta = 0$.

Δ est expression du second degré de discriminant $\delta = 10^2 - 4 \times 9 = 64 = 8^2 > 0$ et admet donc deux racines $m_1 = 1$ et $m_2 = 9$.

Pour $m = 1$, (E) s'écrit $x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0$. Ainsi $x = 1$ et $y = f(1) = g(1) = 3$ et $M(1;3)$ est l'unique point d'intersection.

Pour $m = 9$, (E) s'écrit $x^2 + 6x + 9 = 0 \iff (x+3)^2 = 0$. Ainsi $x = -3$ et $y = f(-3) = g(-3) = -9$ et $M(-3;-9)$ est l'unique point d'intersection.