Devoir de mathématiques

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+3x+\dfrac{5}{2}$.

1. Ecrire f sous forme canonique.
2. En déduire, sans le calculer, le signe du discriminant Δ de f.

Exercice 2 On considère le polynôme $P(X)=X^3-2X^2-19X+20$.

1. Rechercher une racine évidente de P, puis en déduire une factorisation de P.
2. Déterminer le signe de $P(X)$.
3. Résoudre l'inéquation $X^6-2X^4-19X^2+20>0$.
4. Résoudre l'inéquation : $x-\dfrac{3x^2+13x-20}{x^2+x-6}\geqslant 0$

Exercice 3 On considère dans un repère la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x)=-x^2+2x+2$.
Pour tout réel m, on note D_m la droite d'équation $y=(m+3)x+6$.

Discuter, en fonction du paramètre m, le nombre de points d'intersection de la droite D_m et de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1;-2)$, $B(2;3)$ et $C(-2;8)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$. Soit de plus d la droite d'équation $-4x+y+2=0$.

1. Sur une figure placer ces trois points, tracer la droite d, et représenter le vecteur $\vec{u}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_1 passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, puis la tracer sur la figure.
3. Déterminer une équation de la droite d_2 parallèle à d et passant par C puis la tracer.
4. Justifier que les droites d_1 et d_2 sont sécantes, puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.
5. Calculer AB.
6. Quelle est la nature du triangle ABI ?
7. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre B et rayon AB.
   a) Soit $M(x;y)$ un point du cercle $\mathcal{C}$. Montrer que les coordonnées du point M vérifient l'équation $(x-2)^2+(y-3)^2=26$.
   b) Déterminer le nombre de points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite d.