Devoir à la maison

1$^{\text{ère}}$ S

Exercice 1

1) $(\mathcal{E}_1)$ a pour solution $(\mathcal{S}_1) = \left\{-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right\}$. $(\mathcal{E}_2)$ a pour solution $(\mathcal{S}_2) = \left\{-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right\}$.

2) Comme $0 < 600 < 25^2$, alors $0 < \sqrt{600} < 25$, d'où on a $10\sqrt{6} < 25$, ou encore $5 - 2\sqrt{6} > 0$.

3)

$$\alpha^2 = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 \sqrt{5-2\sqrt{6}}^{\,2} = \left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right) = 1$$

d'où on déduit que $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$, et donc, comme $\alpha > 0$, on trouve bien $\boxed{\alpha = 1}$.

$$t_1^2 = \left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) - \sqrt{5-2\sqrt{6}}\right]^2 = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 - 2\alpha + \sqrt{5-2\sqrt{6}}^{\,2} = 5+2\sqrt{6}-2+5-2\sqrt{6} = 8$$

d'où on déduit, comme $t_1 > 0$, que $\boxed{t_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$.

$$t_2^2 = \left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) + \sqrt{5-2\sqrt{6}}\right]^2 = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 + 2\alpha + \sqrt{5-2\sqrt{6}}^{\,2} = 5+2\sqrt{6}+2+5-2\sqrt{6} = 12$$

d'où on déduit, comme $t_2 > 0$, que $\boxed{t_2 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}}$.

4) En posant $X = \cos x$, $(\mathcal{E})$ s'écrit alors comme l'équation du second degré $X^2 - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}X + \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$, de discriminant $\Delta = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sqrt{6} = \frac{5-2\sqrt{6}}{2}$.
D'après la question 2), $\Delta > 0$, et cette équation admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{2}\right] = \frac{t_1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et de même, } X_2 = \frac{t_2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On a donc, $\cos x = X_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ou $\cos x = X_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et alors, d'après 1), $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \left\{-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right\}}$

Exercice 2

1) Les coordonnées cartésiennes de A sont $\boxed{A(2;0)}$ et $B\left(2\cos\dfrac{3\pi}{4}; 2\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$, soit $\boxed{B(-\sqrt{2};\sqrt{2})}$.

Enfin, $\boxed{I\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$.

2) a) On a $OA = OB$ et $IA = IB$, donc (OI) est la médiatrice de $[AB]$ mais aussi, dans le triangle isocèle AOB, la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. On en déduit que $(\vec{i}, \overrightarrow{OI}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{8}$.

b) D'après 1), $OI = \sqrt{\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{6-4\sqrt{2}}{4} + \dfrac{2}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

Ainsi, en utilisant aussi la question précédente, les coordonnées polaires de I sont $\boxed{I\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}, \dfrac{3\pi}{8}\right)}$.

3) D'après les questions 1) et 2 b), on a :

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \quad \text{et donc,} \quad \boxed{\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

et de même, $\boxed{\sin\dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}}$.