Correction du devoir à la maison

Exercice 1

1) $$\text{Pour tout } x>2,\quad x-1-\frac{2}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2}-\frac{2}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)-2}{x-2} = \frac{x^2-3x}{x-2} = f(x)$$

Ainsi, pour tout réel $x>2$, $f(x)=x-1-\dfrac{2}{x-2}$

2) On peut écrire f sous la forme $f=f_1-2f_2$, avec $f_1(x)=x-1$ et $f_2(x)=\dfrac{1}{x-2}$.
- f_1 est une fonction affine croissante sur $\mathbb{R}$.
- On peut décomposer f_2 sous la forme : $f_2=u\circ v$ avec $u(x)=\frac{1}{x}$ et $v(x)=x-2$.
  u est décroissante, tandis que v est croissante ; on en déduit que f_2 est décroissante, et donc que la fonction $-2f_2$ est croissante.
  On en déduit finalement que $f=f_1+(-2f_2)$ est croissante sur $]2;+\infty[$.

Exercice 2

1) La droite $(M'M)$ est perpendiculaire à la droite $(\mathcal{D})$ qui est elle-même perpendiculaire à l'axe des abscisses (Ox). On en déduit que $(M'M)$ est parallèle à l'axe des abscisses, et donc que les points M', H et M ont la même ordonnée y.

De plus les vecteurs $\overrightarrow{HM}(x-a;0)$ et $\overrightarrow{M'H}(a-x';0)$ sont égaux, d'où la relation $x-a=a-x'$, c'est-à-dire $x'=2a-x$.

Finalement, le point M a pour coordonnées $M(2a-x;y)$.

2) Soit x dans l'ensemble de définition de f. Le point $M(x;f(x))$ est un point de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

D'après la question précédente, Le symétrique de M par la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$: $x=a$ est le point $M'(2a-x;f(x))$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc symétrique par rapport à la droite $(\mathcal{D})$ si M' est sur $\mathcal{C}_f$, c'est-à-dire si $2a-x$ est aussi dans l'ensemble de définition de f, et que $f(x)=f(2a-x)$.

3) f est une fonction polynôme, donc définie sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Pour tout } x\in\mathbb{R}, 2a-x=2\times\frac{5}{6}-x\in\mathbb{R}\ ,\quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} f(2\times\frac{5}{6}-x)=f(\frac{5}{3}-x) &= -3\left(\frac{5}{3}-x\right)^2+5\left(\frac{5}{3}-x\right)-1\\ &= -\frac{5^2}{3}+10x-3x^2+\frac{5^2}{3}-5x-1\\ &= -3x^2+5x-1\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question 2), la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x=\dfrac{5}{6}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.