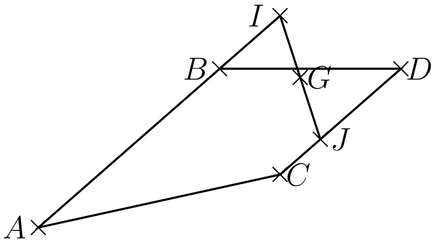
Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1

1) Pour tout point M du plan, $-\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$, soit, en choisissant $M=A$, $\underline{\overrightarrow{AI}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}}$.

2) Pour tout point M du plan, $2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MJ}$, soit, en choisissant $M=C$, $\underline{\overrightarrow{CJ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}}$.

3) Par associativité, G est le barycentre de $\{(I;3),(J;3)\}$, donc G est l'isobarycentre de I et J, ou encore G est le milieu de $[IJ]$.



4) Pour tout point M du plan, $-\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$, et $2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MJ}$. Ainsi, $\|-\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}\|=\|2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| \iff \|3\overrightarrow{MI}\|=\|3\overrightarrow{MJ}\|$ $\iff MI=MJ$. <u>L'ensemble Δ est donc la médiatrice de $[IJ]$.</u>

Exercice 2

1) Si le point M est sur la droite (AB), alors les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires, et donc $MB=2MA$ pour $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MA}$ ou $\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MA}$.
Il y a donc deux possibilités : $\overrightarrow{RB}=2\overrightarrow{RA}$, soit $\overrightarrow{RB}-2\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{0}$, et R est le barycentre de $(A;-2)$ et $(B;1)$, ou $\overrightarrow{SB}=-2\overrightarrow{SA}$, soit $\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{0}$, et S est le barycentre de $(A;2)$ et $(B;1)$.

2) Pour tout point M, $MB=2MA \iff MB^2=4MA^2 \iff \overrightarrow{MB}^2=4\overrightarrow{MA}^2 \iff \overrightarrow{MB}^2-4\overrightarrow{MA}^2=0$ $\iff \left(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\right)=0$

3) Comme S est le barycentre de $(A;2)$ et $(B;1)$, <u>pour tout point M, $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MS}$</u> ; et de même, <u>pour tout point M, $\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MR}$</u>.

Ainsi, $MB=2MA \iff \left(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}\right)=0 \iff -\overrightarrow{MR}\cdot\left(3\overrightarrow{MS}\right)=0 \iff$ $\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{MS}=0$. On en déduit donc que les vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{MS}$ sont orthogonaux, et donc que l'ensemble $\mathcal{T}$ des points M recherchés est le cercle de diamètre $[RS]$.

Exercice 3

1) On a $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$, soit $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$: <u>D est le barycentre de $(A;1)$, $(B;-1)$ et $(C;1)$.</u>

2) Pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}$, et donc $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\|=2\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| \iff 2MI=2MD \iff MI=MD$.
On en déduit donc que l'ensemble E est la médiatrice de la droite (ID).

3) Pour tout point M du plan,

$$\begin{aligned}
MA^2-MB^2+MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2\\
&= \left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\right)^2\\
&= MD^2+2\overrightarrow{MD}\cdot\Big(\underbrace{\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}}_{=\,\overrightarrow{0}}\Big)^2+DA^2-DB^2+DC^2
\end{aligned}$$

d'où, $MA^2-MB^2+MC^2=BD^2 \iff MD^2=BD^2-DA^2+DB^2-DC^2$:
<u>l'ensemble F est le cercle de centre D et de rayon $BD^2-DA^2+DB^2-DC^2$.</u>

Exercice 4

1) L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

f est une fonction rationnelle, et donc, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}=-\infty$, et de même, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$.
$\displaystyle\lim_{x\to2}x^2=4$ et $\displaystyle\lim_{x\to2^-}(2x-4)=0^-$, d'où, $\displaystyle\lim_{x\to2^-}f(x)=-\infty$.
De même, $\displaystyle\lim_{x\to2^+}(2x-4)=0^+$, d'où, $\displaystyle\lim_{x\to2^+}f(x)=+\infty$.

On en déduit que <u>la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$</u>.

2) f est le quotient des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 2x - 4$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
De plus $2x - 4 = 0 \iff x = 2$, et donc, on en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(2x-4) - x^2 \times 2}{(2x-4)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 8x}{(2x-4)^2} = 2x\frac{x-4}{(2x-4)^2} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x-4$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(2x-4)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 + \dfrac{4}{2x-4}$

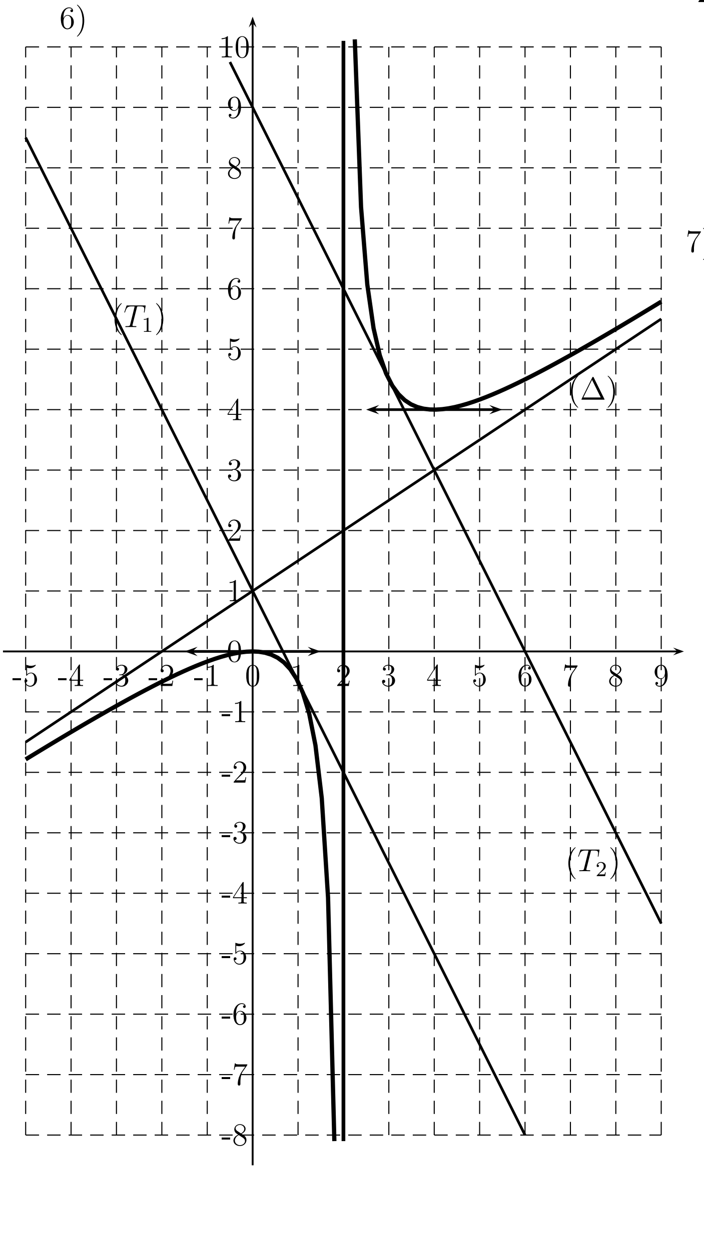
4) D'après la question précédente, on a, $f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) = \dfrac{4}{2x-4}$

et donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x+1\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{2x} = 0$, ainsi que $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x+1\right)\right] = 0$.
On en déduit que <u>Δ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.</u>

5) Les équations des tangentes sont :
en $x = 1$, $(T_1) : y = f'(1)(x-1) + f(1) = -\dfrac{3}{2}(x-1) - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}x + 1$. Soit <u>$(T_1) : y = -\frac{3}{2}x + 1$.</u>

en $x = 3$, $(T_2) : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -\dfrac{3}{2}(x-3) + \dfrac{9}{2} = -\dfrac{3}{2}x + 9$. Soit <u>$(T_2) : y = -\frac{3}{2}x + 9$.</u>

6)



7) <u>Graphiquement</u>, pour $m \in]-\infty; 0[\cup]4; +\infty$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions ; pour $m = 0$ et $m = 4$ l'équation admet une unique solution, tandis que pour $m \in]0; 4[$ elle n'admet aucune solution.

<u>Algébriquement</u>, pour $x \neq 2$,

$$f(x) = m \iff \frac{x^2}{2x-4} = m \iff x^2 - 2mx + 4m = 0$$

Cette équation du second degré admet pour discriminant $\Delta = 4m^2 - 16m = 4m(m-4)$.
Δ est un trinôme du second degré qui admet $m = 0$ et $m = 4$ comme racines, et donc,
si $m \in]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$, $\Delta > 0$ et l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions réelles distinctes ; si $m \in]0; 4[$, $\Delta < 0$ et l'équation $f(x) = m$ n'admet aucune solution, tandis que si $m = 0$ ou $m = 4$, on a $\Delta = 0$, et donc l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution.