Devoir à la maison

Exercice 1 Le but de cet exercice est d'effectuer le tracer de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f, où la fonction est définie par l'expression :

$$f(x) = \frac{x^3 + 20x}{x^2 + 2}$$

1) Montrer que la fonction f est impaire. Sur quel ensemble suffit-il de l'étudier ? (justifier)

2) Etude des variations de f.

   a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^4 - 14x^2 + 40}{(x^2 + 2)^2}$.

   b) Etudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f.

3) Déterminer les équations des tangentes en 0, 1, 2, $\sqrt{6}$ et $\sqrt{10}$.

4) Position relative de la courbe par rapport à la tangente en $\sqrt{6}$.

   a) Soit $P(x) = 8(x^2 + 2)\left[f(x) - \left(-\dfrac{1}{8}x + \dfrac{27}{8}\sqrt{6}\right)\right]$.
   Montrer que $P(x) = 9x^3 - 27\sqrt{6}x^2 + 162x - 54\sqrt{6}$.

   b) Calculer $P(\sqrt{6})$.

   c) Factoriser P.

   d) En déduire le signe de $f(x) - \left(-\dfrac{1}{8}x + \dfrac{27}{8}\sqrt{6}\right)$, puis la positon relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en $\sqrt{6}$.

5) Tracer dans un repère orthonormal, avec 2 cm pour unité, les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en 0, 1, 2, $\sqrt{6}$ et $\sqrt{10}$.

   Tracer ensuite la courbe $\mathcal{C}_f$ en utilisant tous les éléments de l'étude précédente (on pourra éventuellement ajouter quelques points).

Exercice 2 (*Distance d'un point à une parabole*).

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$ et A le point de coordonnées $(2; 0)$.

Le but de l'exercice est de trouver M sur $\mathcal{P}$ tel que la distance AM soit minimale.

1. On note x l'abscisse d'un point M de $\mathcal{P}$. Vérifier que $AM^2 = x^4 + x^2 - 4x + 4$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + x^2 - 4x + 4$.
   Justifier que $f'(x)$ est du signe de $2x^3 + x - 2$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 + x - 2$.

   a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

   b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0 < \alpha < 1$.

4. a) Déduire de ce qui précède les variations de f et dresser son tableau de variations.

   b) Démontrer alors qu'il existe un seul point M_0 de $\mathcal{P}$ d'abscisse α pour lequel la distance AM_0 est minimale.

   c) Démontrer que la tangente à $\mathcal{P}$ en M_0 est perpendiculaire à la droite (AM_0).