Géométrie vectorielle analytique

$1^{\text{ère}}S$

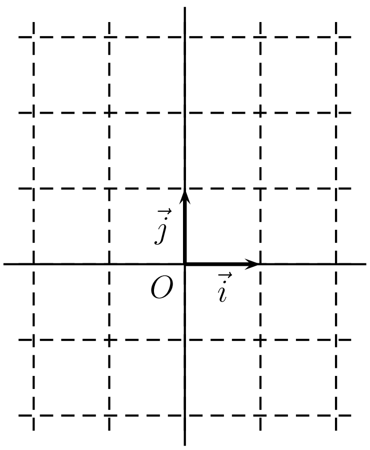
I - Rappels : Repère, coordonnées et équation réduite de droite

Définition *Un repère du plan est constitué par :*

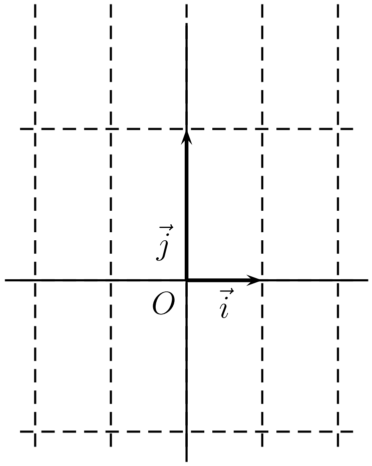
- *le choix d'un point* **origine du repère** *(noté en général O)*
- *le choix d'un* **couple de vecteurs non colinéaires** *(en général $(\vec{i},\vec{j})$).*

On note un tel repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

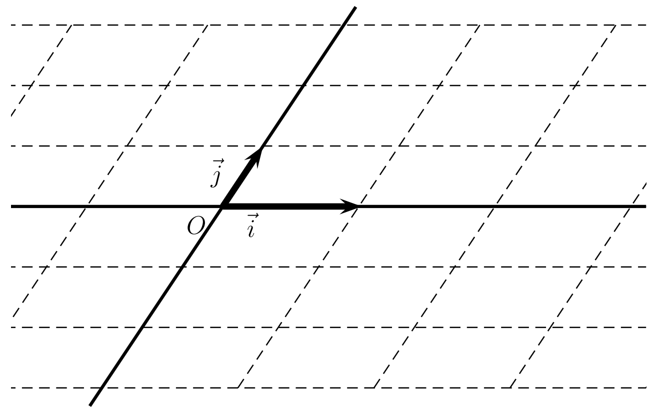
Repère orthonormal
$\vec{i} \perp \vec{j}$, *et* $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$



Repère orthogonal
$\vec{i} \perp \vec{j}$



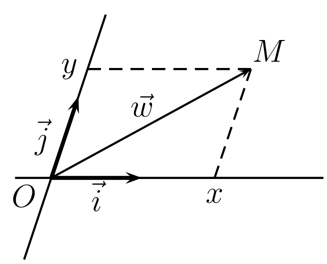
Repère quelconque
$\vec{i}$, $\vec{j}$ *quelconques*



Théorème *Dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, tout point M du plan admet un unique couple de coordonnées $(x;y)$ tel que*

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{w}$ sont celles du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{w}$.



Propriété *Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.*

1) *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées :*

$$\text{si} \quad \vec{u}(x;y) \quad \text{et,} \quad \vec{v}(x';y') \text{ alors,} \quad \vec{u} = \vec{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

2) *Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x';y')$, alors $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y')$.*
   Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx;ky)$.
3) *Si A et B sont deux points de coordonnées (x_A,y_A) et (x_B,y_B) alors,*
   - *$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$*
   - *le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$*
   - *si le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormal, alors la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

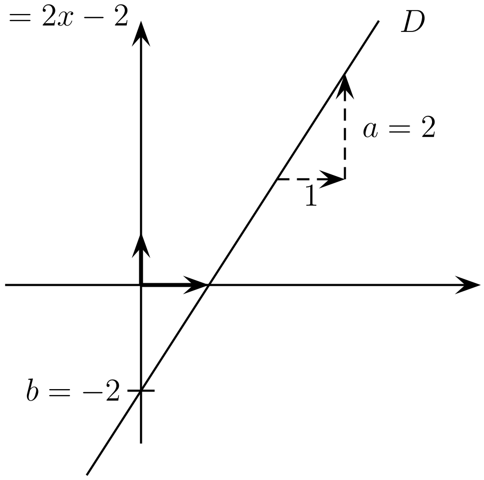
Exercice 1 Soit dans un repère les points $A(-1;1)$, $B(2;3)$, $C(-2;-4)$ et $D(1;-2)$.
Montrer de deux manières différentes que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

Exercice 2 Soit dans un repère $A(2;3)$, $B(-5;7)$ et $C(3;-12)$.
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, et $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
Que retrouve-t-on ?

Propriété Equation réduite d'une droite
Toute droite D non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y=ax+b$ où a et b sont deux nombres réels,
- *le point $A(0;b)$ appartient à la droite D ; b s'appelle ainsi l'ordonnée à l'origine de la droite D.*
- *Lorsque x augmente de 1, y varie de a ; a s'appelle le coefficient directeur de la droite.*

Remarque : Toute droite d'équation $y=ax+b$ est la représentation graphique de la fonction affine $f(x)=ax+b$.
Les points de $\mathcal{C}_f$ sont les points $M(x;y)$ tels que $y=f(x)$, soit $y=ax+b$.

Exemple : $D: y=2x-2$



Exercice 3 Tracer les droites $D_1: y=3x-2$ et $D_2: y=-2x+1$.

Propriété *Les droites d'équations $y=ax+b$ et $y=a'x+b'$ sont parallèles si et seulement si $a=a'$.*

II - Vecteurs colinéaires

Définition *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.*

Théorème
- *Deux vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.*
- *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$, c'est-à-dire si et seulement si les $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnels.*

Théorème *Les vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$.*

Exercice 4 Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont colinéaires.

a) $\vec{u}\,(2;-3)$ et $\vec{v}\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. b) $\vec{u}\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$ et $\vec{v}\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{3}\right)$. c) $\vec{u}\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ et $\vec{v}\left(-2;-\sqrt{6}\right)$.

Exercice 5 Dans un repère, soit les vecteurs $\vec{u}(2;3)$, $\vec{v}(-4;6)$ et $\vec{w}(-4;3)$.
Le vecteur $\vec{z}=2\vec{u}-3\vec{v}$ est-il colinéaire au vecteur $\vec{w}$?

Exercice 6 Dans chaque cas, déterminer le réel m pour que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.
a) $\vec{u}\,(2;6)$ et $\vec{v}\,(m;3)$. b) $\vec{u}\,(27;2m)$ et $\vec{v}\,(2m;3)$. c) $\vec{u}(2m;3m)$ et $\vec{v}(-2;3m)$

Propriété
- *Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*
- *Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.*

Exercice 7 Dans un repère, on donne les points :

$$A(-2;1)\ ;\ B(3;3)\ ;\ C\left(1;\frac{11}{5}\right)\ ;\ D\left(\frac{45}{2};\frac{54}{5}\right)$$

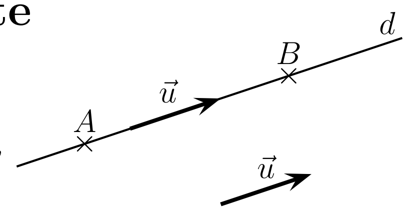
a) Démontrer que les points A, B et C sont alignés.
b) Les points A, B et D sont ils alignés ?

Exercice 8 Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(-2;3)$, $B(4;7)$ et $C(3;2)$.

1. Démontrer que les droites (AB) et (OC) sont parallèles.
2. $M(x;0)$ est un point de l'axe des abscisses. Calculer x pour que A, B et M soient alignés.

Exercice 9 Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(-3;2)$ et $B(-1;7)$.
Le point $M\left(-6;-\dfrac{11}{2}\right)$ est-il un point de (AB) ?

III - Equation cartésienne d'une droite



Définition *Un vecteur directeur d'une droite d est un vecteur $\vec{u}$, non nul, dont la direction est celle de d.*

Remarques :

- Si A et B sont deux points de la droite d, alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d, alors pour tout réel k, $k\neq 0$, $k\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de d.

Théorème *Soit d et d' deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, alors*

$$d /\!/ d' \iff \vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ colinéaires}$$

Théorème *Dans un repère,*

1. *Toute droite d a une équation de la forme $ax+by+c=0$, avec $a\neq 0$ ou $b\neq 0$. Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est alors un vecteur directeur de d.*
2. *Si a, b et c sont trois réels, avec $a\neq 0$ ou $b\neq 0$, alors l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$.*

Une équation de la forme $ax+by+c=0$ s'appelle une **équation cartésienne** *de la droite d.*

Démonstration:

1. Soit une droite d, $A(x_0; y_0)$ un point de d, et $\vec{u}(p;q)$ un vecteur directeur de d.
   Soit $M(x;y)$ un point de d, alors les vecteurs $\vec{u}(p;q)$ et $\overrightarrow{AM}(x-x_0; y-y_0)$ sont colinéaires, donc, $p(y-y_0) - q(x-x_0) = 0 \iff py - qx - py_0 + qx_0 = 0 \iff ax + by + c = 0$ avec $a = -q$, $b = p$ et $c = py_0 - qx_0$.
2. Réciproquement, soit d l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$, alors,
   - si $b \neq 0$, $ax+by+c=0 \iff y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$.
     Cette équation est de la forme $y = mx + p$ qui est l'équation réduite d'une droite.
   - si $b = 0$, alors $a \neq 0$, et $ax+by+c=0 \iff ax+c=0 \iff x = -\dfrac{c}{a}$, qui est l'équation de la droite d'équation $x = -\dfrac{c}{a}$ parallèle à l'axe des ordonnées.

$\square$

Exercice 10 Donner une équation cartésienne de la droite d d'équation $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{5}$.

Exercice 11 Dans chacun des cas, dire si les droites d et d' sont parallèles :

1. Les droites d et d' ont pour équations $2x - 3y + 67 = 0$ et $8x - 12y + 0,3 = 0$.
2. Les droites d et d' ont pour équations $x - \dfrac{4}{7}y + 2 = 0$ et $\dfrac{5}{3}x - y + 3 = 0$.
3. d a pour vecteur directeur $\vec{u} = \dfrac{-9}{2}\vec{i} + 3\vec{j}$ et d' a pour équation $2x + 3y - 3 = 0$.

Corollaire *La droite d'équation réduite $y = mx + p$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1;m)$.*

<u>Démonstration:</u> $y = mx + p \iff mx - y + p = 0$, et les coordonnées d'un vecteur directeur se trouve en utilisant le théorème précédent : $\vec{u}\,(-(-1);m) = (1;m)$. $\square$

Exercice 12 Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A(-2;5)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (2;3)$.

Exercice 13 On donne les points $A(1;-1)$ et $B(3;2)$. Déterminer une équation de la droite d passant par A et B.

Exercice 14 Déterminer une équation de la droite d passant par le point $A(-5;3)$ et qui a pour coefficient directeur $m = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 15 Dans un repère $(0;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(1;5)$, $B(-3;2)$ et $C(5;-1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3;1)$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par A et parallèle à (BC).

Exercice 16

1. Démontrer que les droites d'équations respectives $5x - 2y - 4 = 0$ et $y = -2,5x + 0,5$ ne sont pas parallèles.
2. Tracer ces droites dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
3. Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?

Exercice 17 Pour quelle valeur du nombre m, les droites d et d' d'équations respectives $3x + y = 0$ et $(2m-1)x + (m-3)y - 1 = 0$ sont-elles parallèles ?

Exercice 18

1. Les vecteurs $\vec{u}\left(2\sqrt{3};3\right)$ et $\vec{v}\left(4;2\sqrt{3}\right)$ sont-ils colinéaires ?
2. Le point $A(6;3)$ est-il un point de la droite $d : 2x-5y+3=0$?
3. Déterminer une équation de la droite d passant par le point $A(0;2)$ et de coefficient directeur 3.
4. Déterminer une équation de la droite d passant par $A(1;5)$ et $B(-102;-201)$.
5. La droite d passant par les points $A(-3;22)$ et $B(112;-553)$ est-elle parallèle à la droite d' dont le coefficient directeur vaut -5 ?
6. La droite d a pour équation $2x-3y+5=0$. Quelle est son ordonnée à l'origine ?
7. La droite d a pour équation $2x-3y+5=0$. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d avec les axes du repère.
8. Soit la droite d d'équation $3y-x+1=0$. Donner un point et un vecteur directeur de d.
9. Trouver une équation de la droite Δ passant par le point $A(-1;4)$ et parallèle à la droite d d'équation $3x-2y+1=0$.
10. Trouver une équation de la droite d passant par le point $C(3;2)$ et parallèle à la droite d passant par les points $A(-1;5)$ et $B(2;-2)$.

Exercice 19 Soit Δ la droite passant par le point $M(1;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;3)$. Soit de plus les points $A(8;7)$ et $B(-2;3)$.
La droite Δ passe-t-elle par le milieu I de $[AB]$?

Exercice 20 Dans chacun des cas suivants, dire si les droites d et d' sont confondues, parallèles distinctes ou sécantes. Si ces droites sont sécantes, calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

a) $\left\{\begin{array}{l}2x-y+5=0\\3x-5y+6=0\end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l}8x+2y+6=0\\3x+\dfrac{3}{4}y-5=0\end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l}x+3y-6=0\\\dfrac{1}{3}x+y-2=0\end{array}\right.$

Exercice 21 Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, et déterminer des réels a et b tels que $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.

1. $\vec{u}(3;-1)$; $\vec{v}(1;4)$; $\vec{w}(5;7)$.
2. $\vec{u}\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{4}\right)$; $\vec{v}(-4;1)$; $\vec{w}(-2;4)$.

Exercice 22 Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la droite d_1 passe par le point $A(4;3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(3;2)$. La droite d_2 passe par le point $B(6;0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}(2;-1)$.
d_3 est une droite passant par $C(4;-2)$ et $\vec{w}$ est un de ses vecteurs directeurs.
Démontrer que d_1, d_2 et d_3 sont concourantes si et seulement si $\vec{w}$ est colinéaire au vecteur $4\vec{i}-9\vec{j}$.