Comportement asymptotique des fonctions $1^{\text{ère}}S$

1^{er} exemple. Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

Que se passe-t-il lorsque x se rapproche de -1 ? Comment se comporte $f(x)$?
Et lorsque x devient de plus en plus grand, c'est-à-dire se rappproche de $+\infty$ ou $-\infty$?

En $+\infty$ et $-\infty$: Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande, positivement ou négativement, x et $x+1$ sont "très proches", et ainsi, $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ devient proche de $\dfrac{2x}{x} = 2$.

On écrit alors, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

En -1 : lorsque x se rapproche de -1, $2x$ se rapproche de -2, et $x+1$ se rapproche de 0.

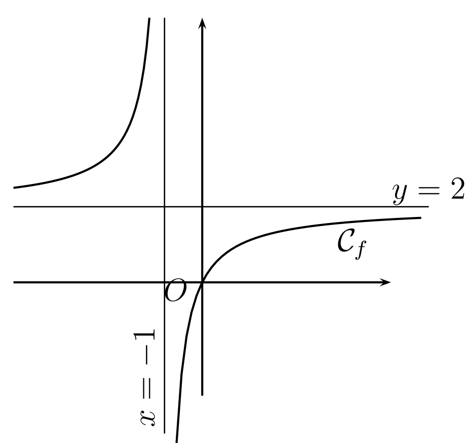
Si x se rapproche de -1, avec $x > -1$, alors $x+1 > 0$ et $\dfrac{2x}{x+1}$ se rapproche de $\dfrac{-2}{x+1}$ donc de $-\infty$.

Si x se rapproche de -1, avec $x < -1$, alors $x+1 < 0$ et $\dfrac{2x}{x+1}$ se rapproche de $+\infty$.

On écrit : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$.

On peut alors compléter le tableau de variations, et tracer l'allure de la courbe représentative :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2

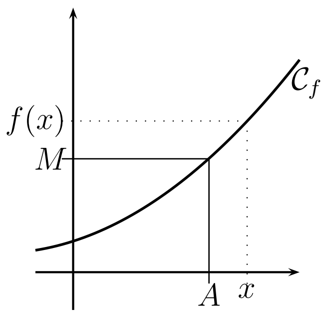


I - Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a; +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, on dit lorsque x tend vers $+\infty$, quatre cas peuvent se présenter :

a) les nombres $f(x)$ deviennent eux aussi “infiniment grands” :



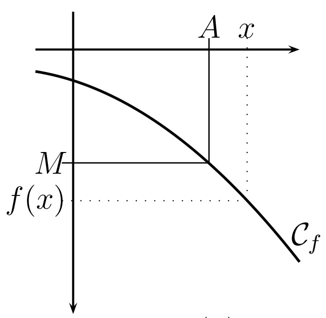
Pour tout nombre M, aussi grand soit-il, on peut avoir $f(x) > M$, dès que on choisit x assez grand.

$$\forall M > 0\ ,\ \exists A > 0 \ \big/\ \forall x \geq A, f(x) \geq M$$

On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

<u>Ex.</u> Soit $f(x) = x^2$ la fonction carré.
Pour tout $M > 0$, dès que $x \geq \sqrt{M}$, $f(x) = x^2 \geq M$, donc, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Les nombres $f(x)$ deviennent infiniment grand négativement

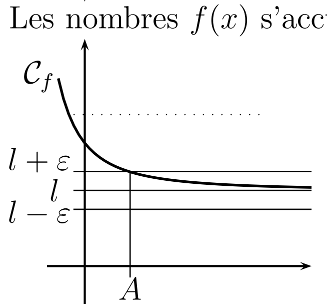


Pour tout nombre $M < 0$, aussi grand soit-il, on peut avoir $f(x) < M$, dès que on choisit x assez grand.

$$\forall M < 0\ ,\ \exists A > 0 \ \big/\ \forall x \geq A, f(x) \leq M$$

On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

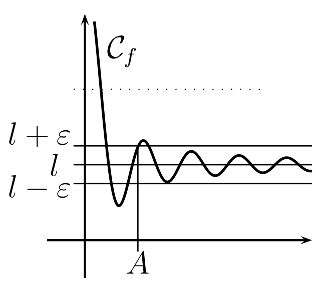
c) Les nombres $f(x)$ s'accumulent autour d'une valeur l :



Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, aussi petit soit-il, $f(x)$ est dans l'intervalle $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ dès que x est assez grand.

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists A > 0 \ \big/\ \forall x \geq A, l-\varepsilon \leq f(x) \leq l+\varepsilon$$

On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

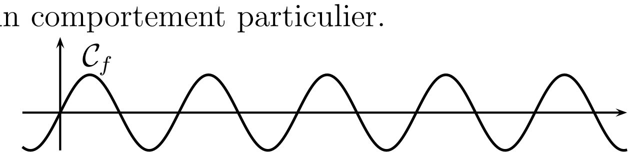


On dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

On peut aussi écrire, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - l) = 0$: lorsque x tend vers $+\infty$, la distance entre $\mathcal{C}_f$ et l'asymptote $y = l$ tend vers 0.

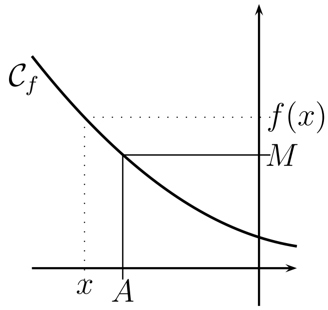
d) Les nombres $f(x)$ n'ont aucun comportement particulier.

Par exemple, $f(x) = \sin x$



2) Limite en $-\infty$

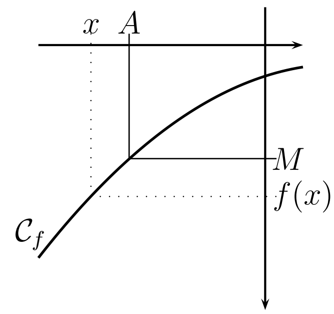
De même que pour la limite en $+\infty$, quatre cas sont possibles :



Pour tout nombre M, aussi grand soit-il, on peut avoir $f(x) > M$, dès que on choisit x assez grand négativement.

$$\forall M > 0 \ , \ \exists A < 0 \ \big/ \ \forall x \leq A, f(x) \geq M$$

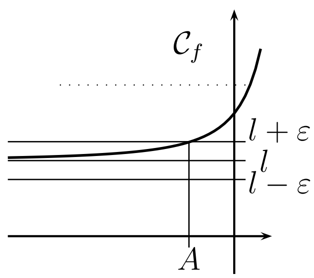
On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.



Pour tout nombre $M < 0$, aussi grand soit-il, on peut avoir $f(x) < M$, dès que on choisit x assez grand négativement.

$$\forall M < 0 \ , \ \exists A < 0 \ \big/ \ \forall x \leq A, f(x) \leq M$$

On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

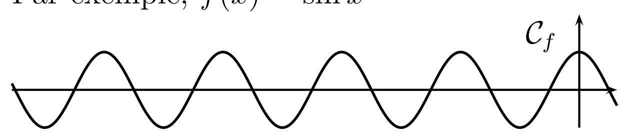


Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, aussi petit soit-il, $f(x)$ est dans l'intervalle $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ dès que x est assez grand négativement.

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists A < 0 \ \big/ \ \forall x \leq A, l-\varepsilon \leq f(x) \leq l+\varepsilon$$

On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

Les nombres $f(x)$ n'ont aucun comportement particulier.
Par exemple, $f(x) = \sin x$



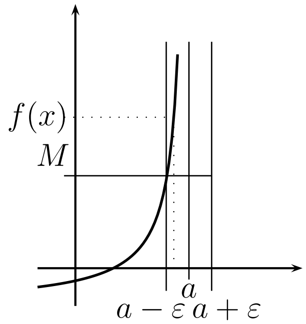
3) Limites en l'infini des fonctions de référence

$f(x)$	$\sqrt{x}$	x^2	x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\cos x$ $\sin x$
Limite en $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	0	0	0	$\times$
Limite en $-\infty$	$\times$	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	0	0	0	$\times$

II - Limite en un point

Soit $a \in \mathbb{R}$. Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proche de a, trois cas peuvent se présenter :

a) les nombres $f(x)$ deviennent infiniment grand :



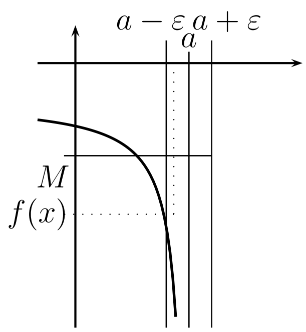
Pour tout nombre M, aussi grand soit-il, on peut avoir $f(x) > M$, dès que on choisit x suffisament proche de a.

$$\forall M > 0\ ,\ \exists\, \varepsilon > 0 \ \big/\ \forall x \in \mathbb{R}, a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon, f(x) \geq M$$

On écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

b) les nombres $f(x)$ deviennent infiniment grand négativement :



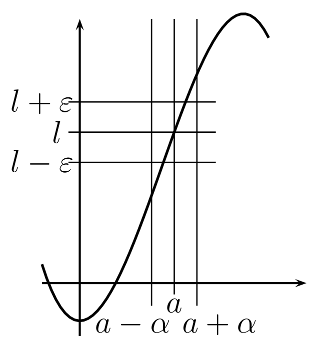
Pour tout nombre M, aussi grand négativement soit-il, on peut avoir $f(x) < M$, dès que on choisit x suffisament proche de a.

$$\forall M < 0\ ,\ \exists\, \varepsilon > 0 \ \big/\ \forall x \in \mathbb{R}, a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon, f(x) \leq M$$

On écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

c) les nombres $f(x)$ se rapprochent du (s'accumulent autour du) nombre l



Pour tout nombre $\varepsilon > 0$ aussi petit soit-i, les nombres $f(x)$ sont dans l'intervalle $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$, dès que on choisit x assez proche de a.

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, \alpha > 0 \ \big/\ \forall x \in \mathbb{R}, a-\alpha \leq x \leq a+\alpha, l-\varepsilon \leq f(x) \leq a+\varepsilon$$

On écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -l$.

Limite en un point des fonctions usuelles

- Soit $a \geq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- Soit $a \in \mathbb{R}$ et P un polynôme, alors $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$
- Soit $a \in \mathbb{R}$ et P et Q deux polynômes tels que $Q(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$

  Remarque : une fonction de la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes s'appellent une fonction rationnelle. Par exemple, la fonction $f(x) = \dfrac{8x^5-3x^3+2x^2-27x+127}{x^2-7x+12}$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3;4\}$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$ et $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$

Remarque : Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, on dit que f est continue en a.

Les propriétés précédentes se résument alors ainsi :

- La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$
- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition

III - Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

Limite de f	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\times$

Démonstration : On démontre par exemple le résultat donné dans la première colonne. Les autres se traitent de manière analogue (les chercher !).

Soit f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l'$, où l et l' sont deux nombres réels.

Cela se traduit par : $\forall\varepsilon>0, \exists A>0 \Big/ \forall x\geq A\ ,\ l-\varepsilon\leq f(x)\leq l+\varepsilon$

et de même, pour la limite de la fonction g : $\forall\varepsilon>0, \exists B>0 \Big/ \forall x\geq B\ ,\ l'-\varepsilon\leq g(x)\leq l'+\varepsilon$.

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon>0$, on peut aussi écrire :

$$\forall\varepsilon>0, \exists A'>0 \Big/ \forall x\geq A'\ ,\ l-\frac{\varepsilon}{2}\leq f(x)\leq l+\frac{\varepsilon}{2}$$

et de même, pour la limite de la fonction g :

$$\forall\varepsilon>0, \exists B'>0 \Big/ \forall x\geq B'\ ,\ l'-\frac{\varepsilon}{2}\leq g(x)\leq l'+\frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement, pour tout $\varepsilon>0$, si $C=\text{Max}(A',B')$ (la plus grande valeur entre A' et B'), alors,

$$\forall x\geq C\ ,\ l-\frac{\varepsilon}{2}\leq f(x)\leq l+\frac{\varepsilon}{2}\ \text{ et },\ l'-\frac{\varepsilon}{2}\leq g(x)\leq l'+\frac{\varepsilon}{2}$$

et donc, en ajoutant ces deux encadrements :

$$\forall x\geq C\ ,\ l+l'-\varepsilon\leq f(x)+g(x)\leq l+l'+\varepsilon$$

ce qui montre que : $\lim\limits_{x\to\infty}(f+g)(x) = l+l'$

2) Limite d'un produit

Limite de f	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Limite de g	l'	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de fg	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\times$

3) Limite d'un quotient

Limite de f	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de g	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Limite de $\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\times$

4) Formes indeterminées

Les formes indéterminées nécessitent une étude particulière. Elles sont au nombre de quatre :

$$\text{“}+\infty-\infty\text{“} \qquad \text{“}0\times\infty\text{“} \qquad \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{“} \qquad \text{“}\frac{0}{0}\text{“}$$

IV - Limite des polynômes

Exemple : Soit la fonction ploynôme f définie par $f(x) = x^3 - x^2 + 5$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, x^3 et x^2 tendent vers $+\infty$.

Ainsi, on est confronté à une forme indeterminée du type "$+\infty - \infty$" et on ne peut appliquer de règle sur les opérations sur les limites.

Néanmoins, intuitivement, on peut penser que, lorsque x tend vers $+\infty$, x^3 tend vers $+\infty$ "plus rapidement" que x^2, et que donc, en d'autres termes, x^2 devient "négligeable" comparé à x^3.

Pour préciser cette idée intuitive, on peut factoriser par x^3 :

$$f(x) = x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}\right)$$

On a alors,

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5}{x}^3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}\right) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Cas général On peut généraliser ce résultat à tout polynôme.

Soit f une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0\ ,\ a_n \neq 0$$

Lorsque $x \neq 0$ (ce qui est le cas lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$), on peut factoriser par le terme de plus haut degré :

$$f(x) = a_n x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \cdots + \frac{a_2}{a_n x^{n-2}} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

avec, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} = 0$, ... , $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0}{a_n x^n} = 0$,

et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \cdots + \frac{a_2}{a_n x^{n-2}} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = 1$$

Ainsi, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ est la même que celle de $a_n x^n$.

Théorème *En plus l'infini et en moins l'infini, un polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.*

Ex :

- Soit $f(x) = 5x^2 - 6x + 1$. Alors, pour $x \neq 0$, $f(x) = 5x^2\left(1 - \frac{6}{5x} + \frac{1}{5x^2}\right)$

  avec, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1 - \frac{6}{5x} + \frac{1}{5x^2}\right) = 1$, d'où, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 5x^2 = +\infty$
- Soit $g(x) = -3x^4 + x^3 - 2x + 1$.
  Calculer $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$
- Soit $h(x) = 4x^7 - 1295x^8 - 7x^5 + 14x^4 - x + 3$.
  Calculer $\lim_{x\to\pm\infty} h(x)$

Ex : Etudier la fonction $f : x \mapsto -x^3 + 3x^2 + 1$.

V - Limite des fonctions rationnelles

Exemple : Soit f la fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$$

f est le quotient des deux polynômes $P(x) = x^2 - 3x + 6$ et $Q(x) = x - 1$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = +\infty$, et donc, lorsque x tend vers $+\infty$, on est confronté à une forme indéterminée du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

On peut factoriser comme précédemment par les termes prépondérants :

$$f(x) = \frac{x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{6}{x^2}\right)}{x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)} = x\frac{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{6}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x}}$$

avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{6}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x}} = 1$, et donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Théorème *En plus l'infini et en moins l'infini, la limite de la fonction rationnelle*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{b-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \ , \ a_n \neq 0 \ , \ b_p \neq 0$$

est la même que celle de $x \mapsto \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$.

Ex :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^3 - 7x^2 + 4x - 2}{5x^2 - 2x + 12} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^3}{5x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6}{5}x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{12x^4 - 7x^2 + 4x - 2}{6x^4 + 3x^2 - 2x + 12} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{12x^4}{6x^4} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2$
- Déterminer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions :

$$f(x) = \frac{24x^2 + 3x - 5}{3x^2 - 2x - 7} \qquad g(x) = \frac{13x^2 - 14x + 9}{-2x^3 + 4x^2 - 6x + 3}$$

VI - Asymptote oblique

Soit f une fonction rationnelle, $f = \dfrac{P}{Q}$, avec P et Q deux polynômes.

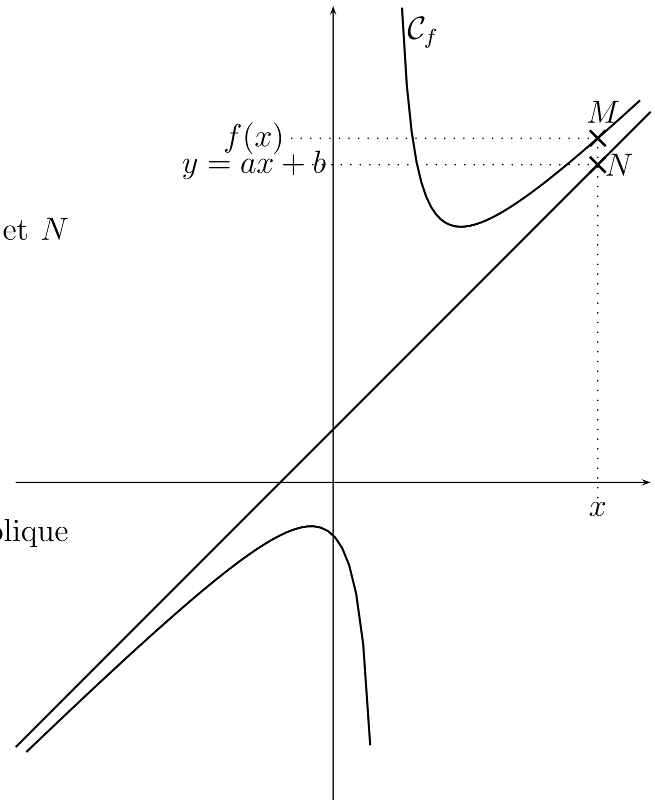
Propriété *Si deg P = deg $Q + 1$, alors f peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, où $R(x)$ est un polynôme tel que deg $R <$ deg G. Cette décomposition est unique.*

On a de plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{R(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{R(x)}{Q(x)} = 0$.

Ex. $f(x) = \dfrac{x^1 + 1}{x - 1} = x + 1 + \dfrac{2}{x - 1}$

Décomposer les fonctions suivantes : $\bullet g(x) = \dfrac{x^2+2x-5}{2x-1}$ $\bullet h(x) = \dfrac{6x^3-4x^2+3}{x^2+x+1}$

Soit donc $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = ax+b+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$. On note Δ la droite d'équation $y = ax+b$.



Soit, pour $x \in \mathcal{D}_f$, M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x et N le point de Δ d'abscisse x.

Alors, $MN = \left|f(x) - (ax+b)\right|$,

et, $\lim\limits_{x\to+\infty} MN = \lim\limits_{x\to-\infty} MN = 0$

La droite Δ d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

<u>Ex.</u>

- Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = \dfrac{-x^2+x+3}{x+2}$. Etudier f.

- Soit g la fonction définie par l'expression $g(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$. Etudier g.

- Soit h la fonction définie par l'expression $h(x) = \dfrac{2x^3+3x^2-7x+3}{x^2+2x-3}$. Etudier h.