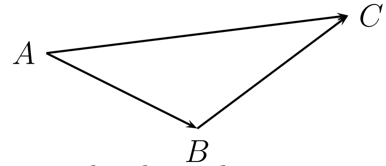
Rappels sur le calcul vectoriel

Propriété *Pour tous points A, B et C du plan, on a la relation de* **Chasles** *:* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



Propriété *Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère et $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan, alors :*

- *le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :* $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$
- *la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est la longueur AB, et si de plus le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormal,* $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_b-y_A)^2}$

  Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{u}(x;y)$ dans un repère orthonormal, alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$
- *le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées* $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

Définition *Deux vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction, ce qui est équivalent à dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.*

Propriété

- *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils sont proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ ou il existe un réel k' tel que $\vec{v}=k'\vec{u}$.*
- *Les vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$.*

Corollaire *Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*

Ex. Soit ABC un triangle, et E et F les points définis par $4\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ et $5\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}$.

Faire une figure, et prouver que les points B, E et F sont alignés.

Ex. Soit $ABCD$ un carré. On note E le point intérieur à $ABCD$ tel que le triangle DCE soit équilatéral, et F le point extérieur à $ABCD$ tel que le triangle BCF soit aussi équilatéral.

On souhaite montrer que les points A, E et F sont alignés.

$1^{\text{ère}}$ *méthode :* Donner une mesure de l'angle $\widehat{ADE}$, puis de l'angle $\widehat{AED}$.
Donner de même une mesure de l'angle $\widehat{CEF}$ et en déduire une mesure l'angle $\widehat{AEF}$.
Conclure.

$2^{\text{ème}}$ *méthode :*

On considère le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$. Déterminer dans ce repère les coordonnées des points A, E et F. (On pourra introduire les points H et H', pieds des hauteurs issues de E et F, et calculer les longueurs HE et $H'F$).

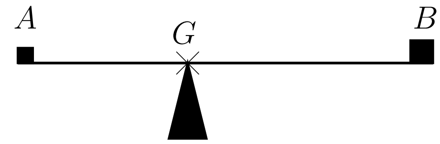
Montrer alors, à l'aide du calcul vectoriel, que les points A, E et F sont alignés.

Ex :1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 p. 259

I - Introduction : centre de gravité et barycentre

Equilibre d'une tige

Une masse A de 2 kg et une masse B de 3 kg sont en équilibre sur une tige rigide.



Où se situe le centre d'inertie, ou point d'équilibre, G ?

Donner une expression vectorielle reliant les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$.

Mêmes questions si, plus généralement, la masse située en A est m et la masse située en B est m'.

Equilibre électrique

Un électron est situé au point A (charge : -1e-), et deux protons sont situés en B (charge : +2e-).

Déterminer le point sur la droite (AB) ou le potentiel électrique est nul.

II - Barycentre de deux points

Théorème *Soit A et B deux points, et α et β deux réels donnés tels que $\alpha+\beta\neq 0$. Alors, il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.*

<u>Démonstration :</u> Pour tout point G, $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}$.

Ainsi, $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{GA}=-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ ou encore à $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$, ce qui définit bien de manière unique le point G.

Définition *On appelle* **barycentre des points pondérés** (A,α) **et** (B,β), *avec $\alpha+\beta\neq 0$, l'unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.*

<u>Ex.</u> Soit A et B deux points.
Placer dans chacun des cas le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β), où :

a) $\alpha=1$ et $\beta=1$

b) $\alpha=1$ et $\beta=3$

c) $\alpha=2$ et $\beta=3$

d) $\alpha=4$ et $\beta=6$

e) $\alpha=-2$ et $\beta=1$

<u>Ex :</u> 14, 15, 16 p. 260

Propriété *Si G est le barycentre de (A,α) et (B,β), alors G est aussi le barycentre de $(A,k\alpha)$ et $(B,k\beta)$, pour tout nombre $k\neq 0$.*

<u>Démonstration :</u> G est le barycentre de (A,α) et (B,β) signifie que $\alpha+\beta\neq 0$ et que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$.

En multipliant cette relation par $k \neq 0$, on a donc aussi $k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, ce qui montre que G est le barycentre de $(A, k\alpha)$ et $(B, k\beta)$ car $k\alpha + k\beta = k(\alpha + \beta) \neq 0$.

Corollaire *Si $\alpha = \beta$, le barycentre G de (A, α) et (B, β) est aussi le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$. On dit que G est l'***isobarycentre** *des points A et B.*

Dans ce cas, on a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, et donc l'isobarycentre des points A et B est le milieu de $[AB]$.

Propriété *Soit G le barycentre de (A, α) et (B, β).*
Alors pour tout point M on a : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$.

Démonstration : Pour tout point M, on a :
$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}$, ce qui donne le résultat car, par défintion du barycentre de (A, α) et (B, β), $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = 0$.

Remarque : Comme la propriété précédente est valable pour tout point M, on peut l'utiliser en particulier en choisissant

— $M = G$ et on retrouve la relation : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{GG} = \overrightarrow{0}$
— $M = A$ et on obtient la relation : $\beta\overrightarrow{AB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{AG}$, qui permet de positionner le point G

Ex : Soit A et B deux points, et $\vec{u}$ un vecteur. Trouver le ou les points M tels que $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{u}$.

Ex : 17, 18, 19, 21 p. 260

Propriété *Soit dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Le barycentre G des points pondérés (A, α) et (B, β) a pour coordonnées $G(x_G; y_G)$ où,*

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \quad \text{et, } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

Démonstration : Pour tout point M, on a $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$.
En choisissant $M = O$, on obtient donc, $(\alpha + \beta)\overrightarrow{OG} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, ou encore

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{OB}$$

d'où les coordonnées données dans le théorème.

Ex : Soit $A(3; -5)$ et $B(9; 7)$

a) Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre I.
b) Déterminer les coordonnées du barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 2)$.

III - Barycentre de trois points

Théorème *Soit A, B et C trois points, et α, β et γ trois réels donnés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Alors, il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.*

Démonstration : Pour tout point G, on a :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}.$$

Ainsi, $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ équivaut à $\overrightarrow{GA}=-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ ou encore à $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$, ce qui définit bien de manière unique le point G.

Définition *On appelle* **barycentre des points pondérés** (A,α)**,** (B,β) **et** (C,γ)*, avec* $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$*, l'unique point* G *tel que* $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Propriété

- *Si G est le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ), alors, pour tout $k\neq 0$, G est aussi le barycentre de $(A,k\alpha)$, $(B,k\beta)$ et $(C,k\gamma)$.*
- *Lorsque les points A, B et C sont affectés du même coefficient $\alpha=\beta=\gamma$ non nul, alors le barycentre de (A,α), (B,α) et (C,α) est aussi le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$.*
  Dans ce cas, G est appelé **isobarycentre** *des points A, B et C. G est alors le centre de gravité du triangle ABC (intersection des médianes).*
- *Pour tout point M, on a : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.*

<u>Ex :</u> Soit trois points A, B et C. Construire le barycentre G des points pondérés $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,2)$.

<u>Ex :</u> 22, 23, 24 p. 260

Théorème <u>*Associativité du barycentre*</u>
Soit G le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ).
On suppose que $\alpha+\beta\neq 0$, et on note H le barycentre de (A,α) et (B,β).

Alors, G est le barycentre de $(H,\alpha+\beta)$ et de (C,γ).

<u>Démonstration :</u> Par définition, on a $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

Comme H est le barycentre de (A,α) et (B,β), pour tout point M, $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MH}$, et donc, en particulier si $M=G$, $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{GH}$.

Ainsi, $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$, ce qui montre que G est le barycentre de $(H,\alpha+\beta)$ et de (C,γ).

<u>Ex :</u> Soit trois points A, B et C. Construire dans chaque cas le barycentre des points (A,α), (B,β) et (C,γ).

a) $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=2$

b) $\alpha=3$, $\beta=1$, $\gamma=2$

c) $\alpha=-2$, $\beta=1$, $\gamma=3$

d) $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=2$

<u>Ex :</u> 27, 28, 33, 34 p. 261

Propriété *Soit dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les points $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ Le barycentre G des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ) a pour coordonnées $G(x_G;y_G)$ où,*

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \textit{et, } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

<u>Ex :</u> Soit $A(-1;3)$, $B(2;4)$ et $C(1;-2)$.
Déterminer les coordonnées du barycentre G de $(A,1)$, $(B,2)$ et $(C,3)$.
Placer les points A, B et C sur une figure, et retrouver géométriquement le point G.

IV - Barycentre de n points

Après avoir introduit et étudié les barycentres de deux points, puis de trois points, on peut aisément généraliser les résultats au cas de n points.

Propriété *Soit n points A_1, A_2, ..., A_n, et et n réels α_1, α_2, ..., α_n tels que $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \neq 0$, alors*

- *il existe un unique point G tel que*

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$$

- *pour tout point M, on a*

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\overrightarrow{MG}$$

- *G est aussi le barycentre $(A_1,k\alpha_1)$, $(A_2,k\alpha_2)$, ..., $(A_n,k\alpha_n)$, pour tout réel $k\neq 0$.*
- *Pour trouver le barycentre G, on peut remplacer p points, parmi les n points, par leur barycentre H affecté de la somme non nulle de leur coefficient.*
- *si $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, ..., $A_n(x_n;y_n)$, alors les coordonnées du barycentre sont $G(x_G;y_G)$ avec*

$$x_G = \frac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} \quad \textit{et,} \quad y_G = \frac{\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\cdots+\alpha_ny_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$$

<u>Ex :</u> Soit quatre points A, B, C et D. Placer le barycentre G de $(A,1)$ $(B,1)$, $(C,2)$ et $(D,2)$.

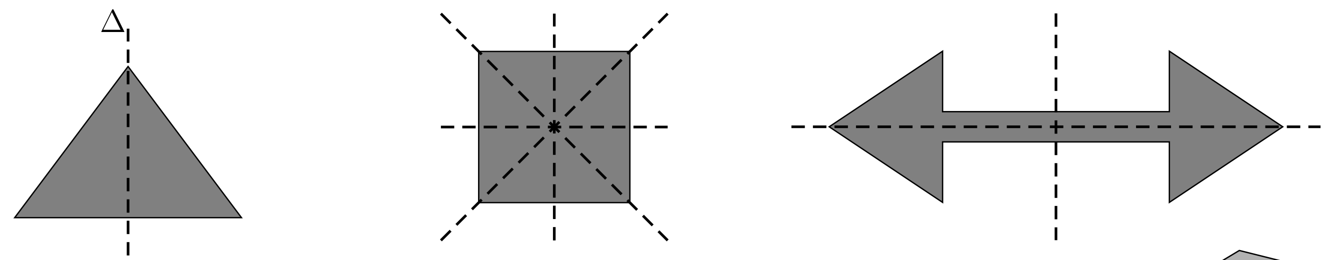
<u>Ex :</u> On considère les points $A(-1,-1)$, $B(3,-2)$, $C(4,3)$ et $D(-2,2)$.
Placer le barycentre G de $(A,2)$ $(B,1)$, $(C,2)$ et $(D,3)$.
Calculer les coordonnées de G et vérifier.

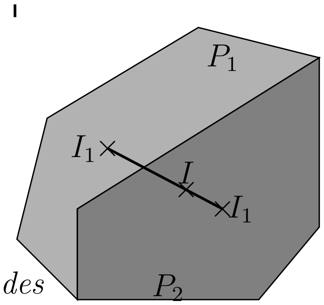
V - Centres d'inertie de plaques

Toutes les plaques considérées par la suite sont supposées homogènes (leur masse surfacique, en $kg.m^{-2}$ est constante).

Théorème *Eléments de symétrie Si une plaque admet un axe de symétrie Δ, alors son centre d'inertie est sur Δ.*
Si la plaque admet un centre de symétrie I, alors son centre d'inertie est I.

<u>Ex :</u>

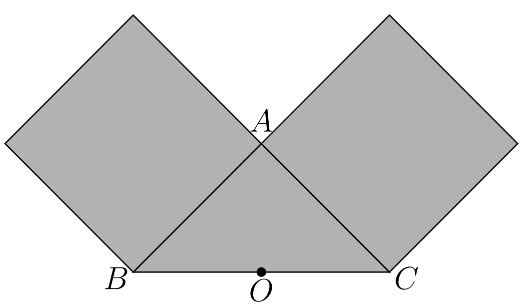




Théorème *Association Soit deux plaques P_1 et P_2 d'aire respective a_1 et a_2 et de centre d'inertie respectif I_1 et I_2.*
Alors le centre d'inertie de la plaque P réunion des plaques P_1 et P_2 est le barycentre de (I_1, a_1) et (I_2, a_2).

<u>Remarque :</u> *Les aires a_1 et a_2 peuvent être prises comme coefficent car, pour des plaques homogènes, les masses sont proportionnelles aux aires.*

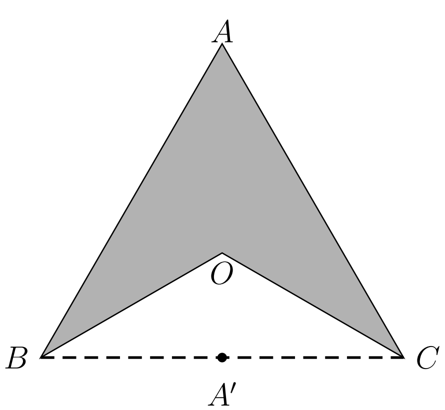
<u>Ex :</u> La plaque P suivante est constituée par la réunion d'un triangle ABC rectangle isocèle en A et de deux carrés de côté 6 cm. O est le mileu de $[BC]$. On note I le centre d'inertie de la plaque P.



a. Pourquoi I est-il sur (OA) ?
b. Placer les centres d'inerties G_1 et G_2 des deux carrés, et G_3 centre d'inertie du triangle ABC.
c. Montrer que I est le barycentre de $(G_1, 2)$, $(G_2, 2)$ et $(G_3, 1)$.
d. Placer I.

<u>Ex :</u> La plaque P suivante est constitué par un triangle équilatéral ABC de côté a, de centre de gravité O, privé du triangle isocèle OBC.

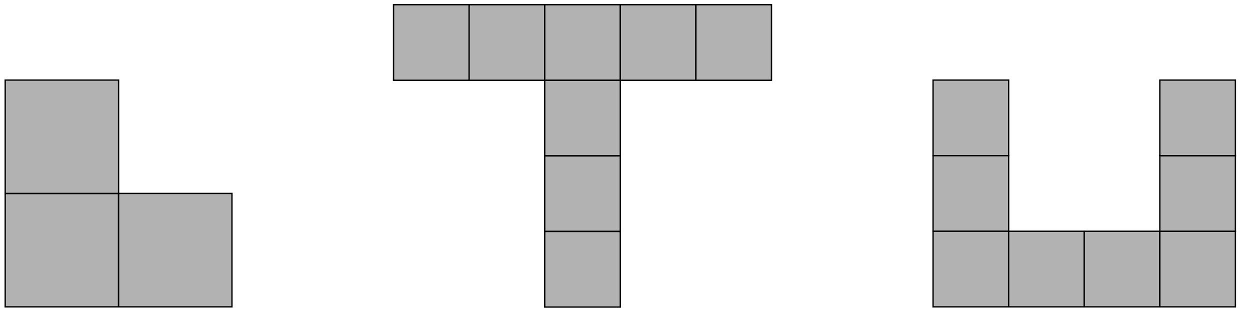
On désigne par Ω le centre de gravité de OBC et par I le centre d'inertie de la plaque P.



- *Méthode 1* En considérant la plaque comme la réunion des triangles AOB et AOC, placer G_1 et G_2, centres d'inertie de AOB et AOC, puis placer I.
- *Méthode 2* La plaque peut aussi être considérée comme la "soustraction" de la plaque AOC à la plaque ABC.

  a. Placer les centres d'inertie G_1 de ABC et Ω de AOC.
  b. Montrer que I est la barycentre de $(O, 3)$, $(\Omega, -1)$.

Ex : Placer le centre d'inertie pour chacune des plaques suivantes (on pourra utiliser deux méthodes différentes dans chaque cas).



Ex : Une rondelle a la forme d'un disque évidé.
On donne $OP = 3OO'$.

1. Placer le centre d'inertie I de la rondelle évidée.
2. On note M la masse de la rondelle évidée. Quelle masse faut-il placer en P afin que le centre d'inertie de l'ensemble, rondelle évidée et masse en P, soit centré en O ?