Suites numériques

I - Définition

Définition *Une suite u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.*
Une suite u est donc un procédé qui à tout entier n associe le nombre $u(n)$.

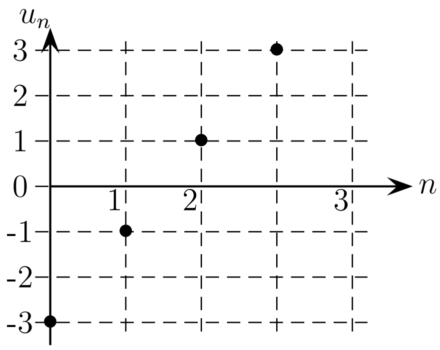
On note en général u_n le **terme d'indice** *n au lieu de $u(n)$, et la suite est notée (u_n), ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au lieu de u :*
u_n est ***un*** *nombre de la suite, et (u_n) désigne* ***l'ensemble de tous les nombres*** *de la suite.*

Ex : Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n - 3$, alors $u_0 = -3$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$ ...

$u_{20} = \dots$

$u_{50} = \dots$

$u_{5250} = \dots$



Définition explicite : Dans l'exemple précédent, le terme général u_n est l'image de l'entier n par une fonction usuelle :

$$u_n = f(n)$$

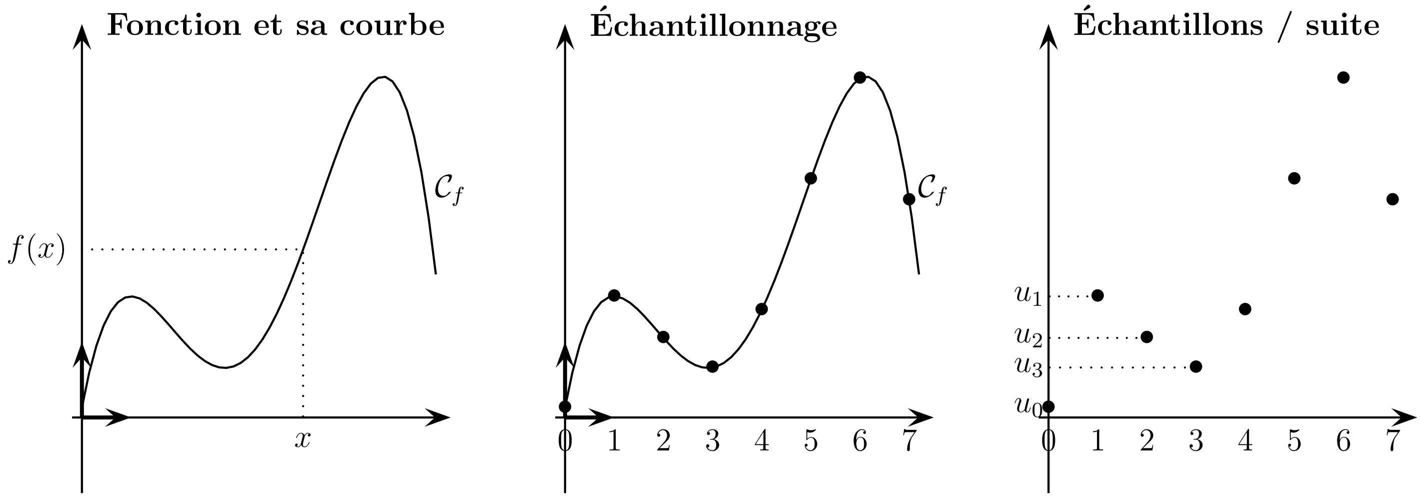
où f est la fonction affine $f : x \mapsto 2x - 3$.

Autres exemples : • $u_n = 2n^2 - 3n + 5$; $u_n = f(n)$ avec la fonction du second degré $f : x \mapsto$ ...

• $v_n = \dfrac{6n+3}{n+1}$; $v_n = g(n)$ avec la fonction rationnelle $g : x \mapsto$ ...

• $w_n = 2^n$; $w_n = h(n)$ avec la fonction exponentielle $h : x \mapsto$ ...

Remarque : $u_n = f(n)$: on ne considère que les images de f pour des valeurs entières, et non pas pour tous les nombres réels d'un intervalle : on dit alors qu'on **échantillonne**, ou qu'on **numérise**, la fonction f.



Définition par récurrence : On peut définir une suite en se donnant son premier terme u_0 et une relation qui permet de calculer un terme de la suite à partir de son prédécesseur : on connaît u_0, à partir duquel on peut calculer u_1, à partir duquel on peut calculer u_2, ...

Exercice 1 On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1,04\, u_n \end{cases}$ Donner u_0, u_1, u_2, u_3, u_{10} et u_{50}.

Plus généralement, une suite est définie par récurrence par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction définie, a priori, sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 3x - 2$.

a) On définie la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Calculer u_1, u_2, u_{10}, u_{100} et u_{1000}.

b) On définie la suite (v_n) par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = f(v_n)$. Calculer v_1, v_2, v_{10}, v_{100} et v_{1000}.

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$ et la suite (u_n) telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Étudier le sens de variation de f.

b) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

c) Placer u_0 sur l'axe des abscisses puis construire graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{5}{x+1}$ et la suite (u_n) telle que $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Étudier le sens de variation de f.

b) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

c) Placer u_0 sur l'axe des abscisses puis construire graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

II - Sens de variation d'une suite

Définition

- *Une suite (u_n) est* **croissante** *si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.*
- *Une suite (u_n) est* **décroissante** *si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.*
- *Une suite (u_n) est* **constante** *si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.*
- *Une suite croissante ou décroissante est dite* **monotone**.

Étudier le sens de variation d'une suite (u_n) revient donc à comparer, **pour tout entier** n, les termes consécutifs u_{n+1} et u_n, soit aussi à étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 5 Etudier le sens de variation des suites définies par les expressions :

a) $u_n = n^2 - n + 2$ b) $u_n = \dfrac{2^n}{3^n}$ c) $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ d) $u_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$

e) (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n - n$ f) $u_n = (n-5)^2$

g) $u_n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ h) $u_n = \dfrac{2^{n+2}}{3^n}$ i) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$

Propriété *Soit (u_n) la suite définie* **explicitement** *par $u_n = f(n)$, où f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, alors (u_n) et f ont le même sens de variation :*

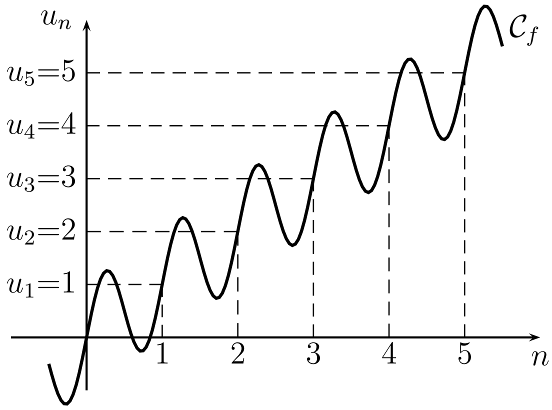
— *si f est croissante, alors la suite (u_n) est croissante,*

— *si f est décroissante, alors la suite (u_n) est décroissante.*

Démonstration : Si par exemple f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors pour tout entier n, comme $n+1 > n$, on a aussi $f(n+1) > f(n)$, c'est-à-dire exactement que $u_{n+1} > u_n$, donc (u_n) est croissante.

Remarque : La réciproque est fausse.

Par exemple, soit la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ avec la fonction $f(x) = x + \sin(2\pi x)$.
Alors, pour tout entier n, $u_n = n + \sin(2\pi n) = n$, et donc (u_n) est croissante (c'est la suite des entiers naturels), tandis que f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.



Exercice 6 Étudier (de deux manières différentes !) le sens de variation des suites définies par :

a) $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ *b)* $u_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$ *c)* $u_n = (n-5)^2$ *d)* $u_n = n - 1 + \dfrac{4}{n+1}$

e) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$ *f)* $u_n = n + (2n-3)^3$ *g)* $u_n = n^2 - 10n + 26$ *h)* $u_n = 2n^3 - 30n^2 + 54n$

III - Suites particulières

1. Suites arithmétiques

Définition *Une suite arithmétique est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant la même quantité r, appelée* **raison** *de la suite, au terme précédent.*
Pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r$.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_3 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_4 \arrow[r, bend left, "+r"] & \cdots & \cdots & u_n \arrow[r, bend left, "+r"] & u_{n+1} & \cdots \end{tikzcd}$$

Exercice 7

a) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par la relation $u_{n+1} = u_n + 1$.
Alors, $u_1 = \ \dots$, $u_2 = \ \dots$, $u_3 = \ \dots$.
(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ \dots$.

b) Soit (v_n) la suite définie par la relation $v_n = 5n + 2$.

Alors, pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = \dots$.

On en déduit que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ \dots$

c) La suite (w_n) définie par la relation $w_n = n^2 + 2$ est-elle arithmétique ?

Propriété *Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$.*

Démonstration : Par définition d'une suite arithmétique, $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$, et donc la propriété est vraie pour les deux premiers termes.

De plus, si on la suppose vraie pour un entier p quelconque : $u_p = u_0 + pr$, alors au rang suivant, $u_{p+1} = u_p + r = (u_0 + pr) + r = u_0 + (p+1)r$: la propriété est encore vraie pour l'entier suivant $(p+1)$.

Ainsi la propriété s'étend, de proche en proche, à tous les entiers naturels, et donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + r$.

Remarque : Cette technique de démonstration s'appelle une **démonstration par récurrence**.

Exercice 8

1. Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 2$.
   Calculer u_{3002}.
2. Soit la suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_2 = 1200$ et de raison $r = -10$.
   Calculer v_{25}. A partir de quel rang la suite est-elle négative ?

Propriété *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors, quels que soient les entiers m et p, $u_n - u_p = (n-p)r$.*

Démonstration : D'après le théorème précédent, $u_m = u_0 + mr$ et $u_p = u_0 + pr$, d'où, en soustrayant ces deux égalités, $u_m - u_p = (m-p)r$.

Exercice 9 Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_{10} = -70$ et $u_{25} = 80$.
Calculer la raison r de cette suite, puis calculer u_0 et u_{1212}.

2. Suites géométriques

Définition *Une suite géométrique est une suite dont chaque terme est obtenu en multipliant par la même quantité q , appelée* **raison** *de la suite, le terme précédent.*
Pour tout entier n, $u_{n+1} = q \times u_n \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} \dots \quad \dots \quad u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1} \quad \dots$$

Exemples : • La suite de nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...des puissances successives de 2 est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.

• la suite (v_n) de terme général $v_n = (-1)^n$, pour laquelle $v_0 = 1$, $v_1 = -1$, $v_2 = 1$, $v_3 = -1$, ...est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = -1$.

• Soit la suite (w_n) définie par la relation $w_n = 2 \times 3^n$.

Alors, pour tout entier n, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dots$

On en déduit que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \dots$

Propriété *Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q, alors, pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n$.*

Exercice 10 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0,2$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$.
Calculer u_4 et u_{20}.

Exercice 11 On utilise une feuille de papier, d'épaisseur $e = 0,5$ mm, que l'on replie successivement en deux. Quelle est l'épaisseur de la feuille après le premier pliage ? après le deuxième ? après le $n^{\text{ème}}$?

Combien de fois faudrait-il replier cette feuille en deux pour obtenir une épaisseur supérieure à la hauteur de la tour Eiffel (environ 300 m) ?

Propriété *Soit (u_n) une suite géométrique non nulle de raison $q \neq 0$, alors, pour tous entiers m et p,*

$$\frac{u_m}{u_p} = q^{m-p}$$

<u>Démonstration :</u> D'après le théorème précédent, $u_m = u_0 \times q^m$, et $u_p = u_0 \times q^p$, et donc, en divisant terme à terme ces deux relations (car si $q \neq 0$, $u_p \neq 0$), $\dfrac{u_m}{u_p} = \dfrac{u_0\, q^m}{u_0\, q^p} = q^{m-p}$.

Exercice 12 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$.

On définit la suite (v_n) à partir de (u_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$.

1) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.

2) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 13 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4-u_n}$.

On définit la suite (v_n) à partir de la suite (u_n) par la relation $v_n = \dfrac{3u_n+2}{u_n}$.

1) Montrer que (v_n) est arithmétique.

2) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Exercice 14 (u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4} \end{cases}$, et (v_n) est définie par $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.

1) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3 et conjecturer la nature de la suite (v_n).

2) Prouver que la suite (v_n) est géométrique.

3) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

IV - Sommes des termes d'une suite

Soit (u_n) une suite, on cherche à calculer la somme des termes $S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_{q-1} + u_q$.

Cette somme contient : $\boxed{}$ termes.

1. Suite arithmétique

Propriété *La somme des n premiers entiers naturels est :* $S_n = 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

<u>Démonstration :</u>

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\
S_n & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

La somme contient ... termes, et donc on trouve ainsi, $2S_n =$ ... , soit $S_n =$ ...

Propriété *La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne des termes extrêmes :*
$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{q-1} + u_q = (q-p+1)\dfrac{u_p+u_q}{2}$

Démonstration : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors,

$$S = u_p+u_{p+1}+u_{p+2}\cdots+u_{q-1}+u_q = u_p+\Big(u_p+r\Big)+\Big(u_p+2r\Big)+\cdots+\Big(u_p+(q-1-p)r\Big)+\Big(u_p+(q-p)r\Big)$$

soit,

$$\begin{aligned} S &= (p-q+1)u_p + r\Big[1+2+\cdots+(q-1-p)+(q-p)\Big] \\ &= (p-q+1)u_p + r\frac{(q-p)(q-p+1)}{2} \ , \ \text{d'après la propriété précédente} \\ &= \frac{(q-p+1)}{2}\Big[2u_p+(q-p)r\Big] = \frac{(q-p+1)}{2}\Big[u_p+\underbrace{u_p+(q-p)r}_{=u_q}\Big] \end{aligned}$$

2. Suite géométrique

Propriété *Pour tout réel $q \neq 1$, $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.*
Pour $q=1$, $1+q+q^2+\cdots+q^n = 1+1+1+\cdots+1 = n$.

Démonstration : Pour $q\neq 1$, $S = 1+q+q^2+\cdots+q^n$, et donc, $qS = q+q^2+\cdots+q^{n+1} = S-1+q^{n+1}$,

d'où, $S - qS = (1-q)S = \quad \dots$

Propriété *La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique, de premier terme a et de raison q est :* $a\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Exercice 15 Calculer les sommes :

a) $S = 1+2+4+8+16+\cdots+1024$ b) $P = 3+5+7+9+\cdots+121$ c) $Q = 2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{32}$

Exercice 16 Résoudre les équations :

a) $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^7=0$ b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\cdots+\dfrac{1}{x^8}=0$ c) $27x^7+9x^5+3x^3+x=0$

Exercice 17 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3^n+4n-3$.
On note (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = 3^n$ et $w_n = 4n-3$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et que (w_n) est une suite arithmétique
b) Calculer $V_n = v_0+v_1+\cdots+v_n$ et $W_n = w_0+w_1+\cdots+w_n$.
c) En déduire la somme, en fonction de n, $U_n = u_0+u_1+\cdots+u_n$.

Exercice 18 Soit (u_n) la suite définie par les deux premiers termes $u_0=1$ et $u_1=2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n$.

1) a) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1}-u_n$ est géométrique.
   b) Exprimer alors v_n en fonction de n.
2) a) Calculer en fonction de n la somme $S_n = 0,5+(0,5)^2+(0,5)^3+\cdots+(0,5)^n$.
   b) Exprimer alors u_n en fonction de n.