Suites numériques - Exercices

Exercice 1 On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1,04\, u_n \end{cases}$ Donner u_0, u_1, u_2, u_3, u_{10} et u_{50}.

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 3x - 2$.

a) On définie la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Calculer u_1, u_2, u_{10}, u_{100} et u_{1000}.

b) On définie la suite (v_n) par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = f(v_n)$. Calculer v_1, v_2, v_{10}, v_{100} et v_{1000}.

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$ et la suite (u_n) telle que $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Étudier le sens de variation de f.

b) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

c) Placer u_0 sur l'axe des abscisses puis construire graphiquement (sans calcul!) sur l'axe des abscisses les premiers termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{5}{x+1}$ et la suite (u_n) telle que $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Étudier le sens de variation de f.

b) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

c) Placer u_0 sur l'axe des abscisses puis construire graphiquement (sans calcul!) sur l'axe des abscisses les premiers termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

Exercice 5 Etudier le sens de variation des suites définies par les expressions :

a) $u_n = n^2 - n + 2$ b) $u_n = \dfrac{2^n}{3^n}$ c) $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ d) $u_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$

e) (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n - n$ f) $u_n = (n-5)^2$

g) $u_n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ h) $u_n = \dfrac{2^{n+2}}{3^n}$ i) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$

Exercice 6 Étudier (de deux manières différentes!) le sens de variation des suites définies par :

$a)u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ $b)u_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$ $c)u_n = (n-5)^2$ $d)u_n = n - 1 + \dfrac{4}{n+1}$

$e)u_n = \dfrac{n^2+1}{2n}$ $f)u_n = n + (2n-3)^3$ $g)u_n = n^2 - 10n + 26$ $h)u_n = 2n^3 - 30n^2 + 54n$

Exercice 7

a) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par la relation $u_{n+1} = u_n + 1$.
Alors, $u_1 = \ \ldots$, $u_2 = \ \ldots$, $u_3 = \ \ldots$.
(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ \ldots$.

b) Soit (v_n) la suite définie par la relation $v_n = 5n + 2$.

Alors, pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = \ldots$.

On en déduit que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ \ldots$

c) La suite (w_n) définie par la relation $w_n = n^2 + 2$ est-elle arithmétique?

Exercice 8

1. Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = 2$.
   Calculer u_{3002}.
2. Soit la suite arithmétique (v_n) de premier terme $v_2 = 1200$ et de raison $r = -10$.
   Calculer v_{25}. A partir de quel rang la suite est-elle négative?

Exercice 9 Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_{10} = -70$ et $u_{25} = 80$.
Calculer la raison r de cette suite, puis calculer u_0 et u_{1212}.

Exercice 10 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0,2$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$.
Calculer u_4 et u_{20}.

Exercice 11 On utilise une feuille de papier, d'épaisseur $e = 0,5$ mm, que l'on replie successivement en deux. Quelle est l'épaisseur de la feuille après le premier pliage ? après le deuxième ? après le $n^{\text{ème}}$?

Combien de fois faudrait-il replier cette feuille en deux pour obtenir une épaisseur supérieure à la hauteur de la tour Eiffel (environ 300 m) ?

Exercice 12 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$.
On définit la suite (v_n) à partir de (u_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.
2. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

Exercice 13 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4-u_n}$.
On définit la suite (v_n) à partir de la suite (u_n) par la relation $v_n = \dfrac{3u_n+2}{u_n}$.

1. Montrer que (v_n) est arithmétique.
2. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Exercice 14 (u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4} \end{cases}$, et (v_n) est définie par $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3 et conjecturer la nature de la suite (v_n).
2. Prouver que la suite (v_n) est géométrique.
3. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Exercice 15 Calculer les sommes :
a) $S = 1+2+4+8+16+\cdots+1024$ b) $P = 3+5+7+9+\cdots+121$ c) $Q = 2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{32}$

Exercice 16 Résoudre les équations :
a) $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^7 = 0$ b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\cdots+\dfrac{1}{x^8} = 0$ c) $27x^7+9x^5+3x^3+x = 0$

Exercice 17 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3^n + 4n - 3$.
On note (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = 3^n$ et $w_n = 4n-3$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et que (w_n) est une suite arithmétique
b) Calculer $V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $W_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.
c) En déduire la somme, en fonction de n, $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Exercice 18 Soit (u_n) la suite définie par les deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 1,5u_{n+1} - 0,5u_n$.

1) a) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est géométrique.
   b) Exprimer alors v_n en fonction de n.
2) a) Calculer en fonction de n la somme $S_n = 0,5 + (0,5)^2 + (0,5)^3 + \cdots + (0,5)^n$.
   b) Exprimer alors u_n en fonction de n.