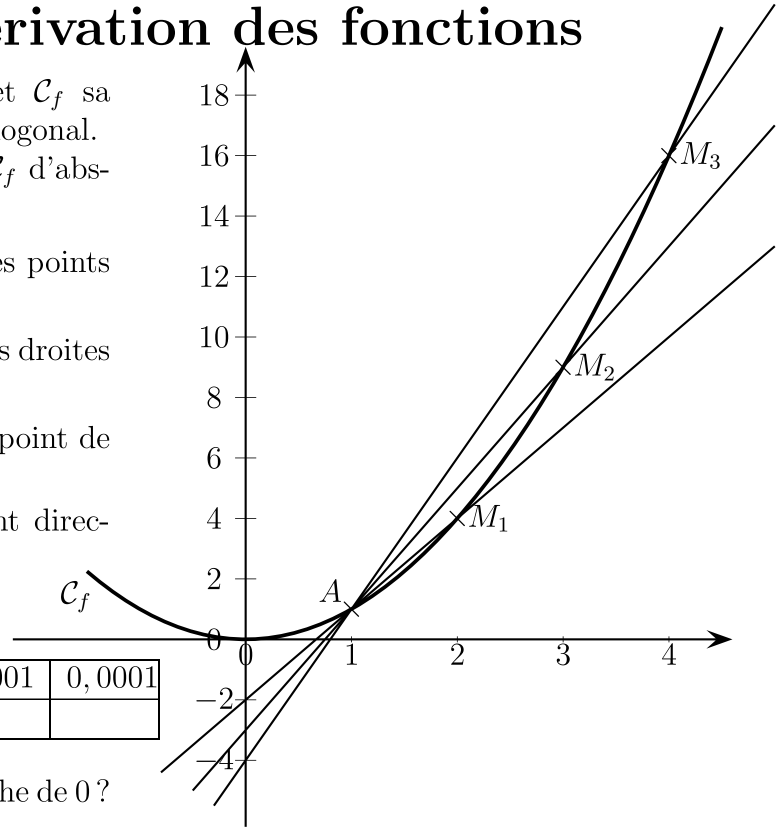
Exercices: Dérivation des fonctions

Exercice 1 Soit f la fonction carré et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. On note A, M_1, M_2 et M_3 les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 1, 2, 3 et 4.

1. Tracer sur une figure $\mathcal{C}_f$ et placer les points A, M_1, M_2, M_3.
2. Calculer les coefficients directeurs des droites (AM_3), (AM_2) et (AM_1).
3. Soit un nombre réel $h > 0$, et M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $1 + h$.
   Donner une expression du coefficient directeur m_h de la droite (AM).
4. Compléter le tableau :



h	1	$0,5$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
m_h						

5. Que se passe-t-il lorsque h se rapproche de 0 ?

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3$.

1. Tracer dans un repère orthogonal $\mathcal{C}_f$ et sa tangente au point d'abscisse $a = 1$.
   Déterminer alors graphiquement $f'(1)$.
2. a) Pour $h > 0$, on pose $\tau(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Compléter le tableau :

h	1	$0,5$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
$\tau(h)$						

   Vers quoi semble tendre le nombre $\tau(h)$ lorsque le nombre h tend vers 0 ?

   b) Démontrer ce résultat algébriquement à partir de l'expression de $\tau(h)$ et de celle de f.

Exercice 3 Dans chaque cas, montrer que f est dérivable au point a indiqué, et donner $f'(a)$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; $a = 2$

c) $f(x) = x^2 - 2x$; $a = 2$

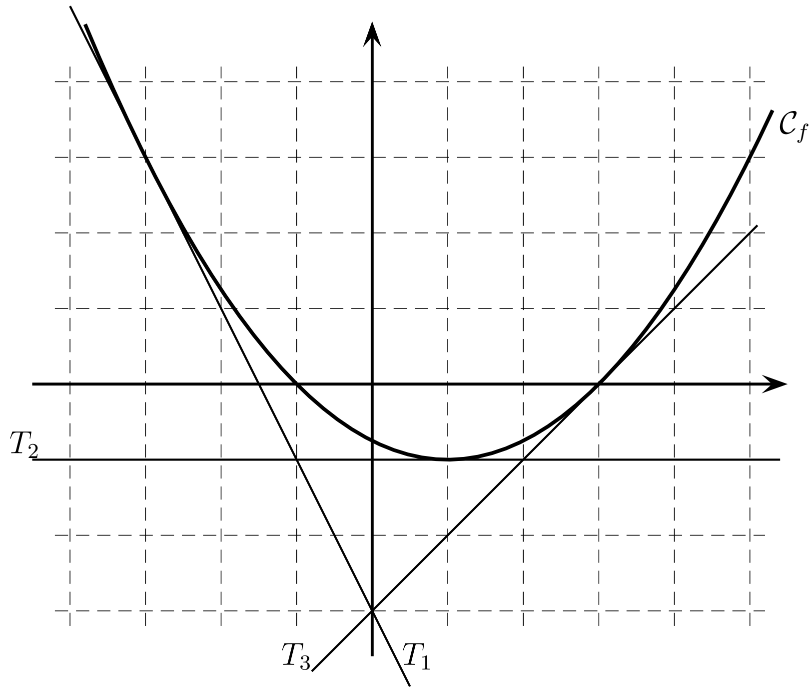
d) $f(x) = x^2 - 2x$; $a \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = x^3 - 3x$; $a = 2$

f) $f(x) = x^3 - 3x$; $a \in \mathbb{R}$

Exercice 4 $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f.
T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -3, 1 et 3.

Déterminer graphiquement $f'(-3)$, $f'(1)$ et $f'(3)$, puis les équations de T_1, T_2 et T_3.



Exercice 5 Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas :

a) $f(x)=3$	b) $f(x)=3x$	c) $f(x)=\dfrac{5}{2}x$	d) $f(x)=x^2$
e) $f(x)=x^7$	f) $f(x)=2x^3$	g) $f(x)=3x+2$	h) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$
i) $f(x)=-x^2+x-\dfrac{7}{2}$	j) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$	k) $f(x)=\dfrac{-x^2-x+1}{x+1}$	l) $f(x)=\dfrac{4}{x}$
m) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$	n) $f(x)=2x^5+\sqrt{x}$	o) $f(x)=(3x+2)x^2$	p) $f(x)=(-2x+1)(x+1)$

Exercice 6 Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point α donné :

a) $f(x)=3x^2+5x-2$ et $a=-2$

b) $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(-3+x+x^2\right)$ et $a=4$.

c) $f(x)=(2x+1)^2$ et $a=0$.

Exercice 7 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+4x$, et $\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative.

1. Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 3.
2. a) Etudier le signe de $f(x)-(-8x+18)$.
   b) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.

Exercice 8

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
   Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a)=af'(a)$.
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-3x+1$.
   Quels sont les points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente passe par l'origine.

Exercice 9 Dresser le tableau de variation des fonctions de l'exercice 5 et des fonctions suivantes :

q) $f(x)=2x^2+4x-3$ r) $f(x)=2x^3+3x^2-36x+4$ s) $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ t) $f(x)=\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{x+2}$

Exercice 10 f est la fonction définie par l'expression $f(x)=\dfrac{1}{-2x^2+4x-3}$.

1. On définie la fonction g sur $\mathbb{R}$ par l'expression $g(x)=-2x^2+4x-3$.
   Etudier les variations de g.
2. En déduire les variations de f puis le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{4x^2+1}$.

1. A l'aide de la calculatrice tracer $\mathcal{C}_f$ et localiser le maximum de f.
2. Vérifier par le calcul s'il s'agit bien d'un maximum de f.

Exercice 12 Soit f la fonction définie sur $[-10;10]$ par $f(x)=-x^3+6x^2-10$.
Rechercher les éventuels extrema locaux et globaux de f.

Exercice 13 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.
Déterminer les coordonnés de l'extremum de f. Est-ce un minimum ou un maximum ?

Exercice 14 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6;4]$.
On donne le tableau de variation de la fonction f' :

x	-6		-2		1		4
f'	-1	↗	0	↗	4	↘	3

Préciser les éventuels extrema locaux de f.

Exercice 15 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4;4]$.
On donne le tableau de variation de la fonction f' :

x	-4		-1		1		2		4
f'	-7	↗	0	↘	-1	↗	0	↗	3

Préciser les éventuels extrema locaux de f.

Exercice 16 La consommation C d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de la vitesse v, pour une vitesse comprise entre 10 km/h et 130 km/h, par l'expression

$$C(v)=0,06v+\frac{150}{v}\ .$$

A quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ?

Exercice 17 Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2;5]$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	-2		1		4		5
f	1	↗	4	↘	-3	↗	10

Déterminer le nombre de solutions, et l'intervalle où elles se situent, de l'équation
a) $f(x)=0$ b) $f(x)=2$ c) $f(x)=-5$

Exercice 18 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x+1$.
Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[-3;2]$.
Déterminer un encadrement plus précis de cette solution.

Exercice 19 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x-1$.
Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement trois solutions, respectivement dans les intervalles $]-2;-1[$, $]-1;1[$ et $]1;2[$.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la plus grande de ces solutions.