Applications du produit scalaire

$1^{\text{ère}}$ S

1 Trigonométrie

Exercice 1 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit a et b deux réels, et A et B les points de coordonnées polaires $A(1;a)$ et $B(1;b)$.

1) Déterminer, en fonction de a et b, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$.
   En déduire une expression du produit scalaire $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$.
2) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A et B.
   En déduire une autre expression de $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$.
3) Déduire de ce qui précéde la relation : $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
4) En utilisant la relation précédente avec les angles a et $-b$, montrer la relation :
   $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
5) En utilisant les relations précédentes avec les angles $\dfrac{\pi}{2}-a$ et b, montrer les relations :
   $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$ et $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$.

Théorème 1 *(Formules d'addition) Pour tous réels a et b,*

$$\left\{\begin{array}{rcl}\cos(a+b)&=&\cos a\,\cos b-\sin a\,\sin b\\ \cos(a-b)&=&\cos a\,\cos b+\sin a\,\sin b\\ \sin(a+b)&=&\sin a\,\cos b+\sin b\,\cos a\\ \sin(a-b)&=&\sin a\,\cos b-\sin b\,\cos a\end{array}\right.$$

2 Lieux géométriques

Théorème 2 *(de la médiane) Soit A et B deux points, et I le milieu de $[AB]$. Alors, pour tout point M,*

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

a) Lieu : $\boxed{MA^2+MB^2=k}$

Exercice 2 Soit A et B deux points avec $AB=4$.

1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_{26}$ des points M tels que $MA^2+MB^2=26$.
2) Déterminer, suivant les valeurs de k, l'ensemble $\mathcal{E}_k$ des points M tels que $MA^2+MB^2=k$.

Théorème 3 *Soit A et B deux points, k un réel, et $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des points tels que $MA^2+MB^2=k$, alors*

- *si k ...*
- *si k ...*
- *si k ...*

b) Lieu : $\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k}$

Exercice 3 Soit A et B deux points avec $AB = 4$.

1) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_5$ des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.
2) Déterminer, suivant les valeurs de k, l'ensemble $\mathcal{E}_k$ des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

Théorème 4 *Soit A et B deux points, k un réel, et $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$, alors*

- *si k ...*
- *si k ...*
- *si k ...*

En particulier, on a :

Théorème 5 *L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est ...*

c) Lieu : $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k}$

Exercice 4

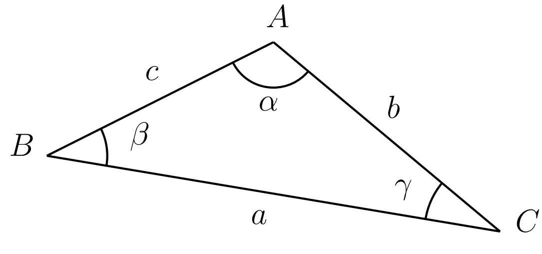
1) Soit A et B deux points. Déterminer les point $H \in (AB)$ tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = k$.
2) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$.

Théorème 6 *Soit A et B deux points, k un réel, alors l'ensemble $\mathcal{D}_k$ des points tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est ...*

3 Relations métriques dans les triangles

Dans la suite, dans le triangle ABC, on utilisera les notations :

$$\begin{cases} a = BC \\ b = AC \\ c = AB \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha = \widehat{A} \\ \beta = \hat{B} \\ \gamma = \hat{C} \end{cases}$$



Théorème 7 *(Pythagore) Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si ...*

Théorème 8 *(Al-Kashi, ou Pythagore généralisé) Dans un triangle ABC quelconque, on a :*

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\,\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma \end{cases}$$

Exercice 5 Soit ABC un triangle avec $AB = 3$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 22°$

Déterminer toutes les longueurs et les angles de ce triangle, ainsi que son aire.

Théorème 9 *(Formule des sinus) Dans un triangle ABC quelconque d'aire $\mathcal{A}$, on a :*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin\gamma = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin\alpha = \frac{1}{2}\,c\,a\,\sin\beta$$

et de plus,

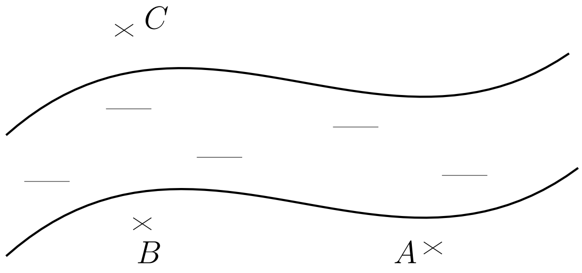
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Exercice 6 Soit ABC un triangle avec $AB = 3$, $\widehat{BAC} = 22°$ et $\widehat{ABC} = 43°$.

Déterminer tous les angles, les longueurs, et l'aire de ce triangle.

Exercice 7

Déterminer la largeur BC de la rivière, sachant que $AB = 100$ m, $\widehat{B} = 93°$ et $\widehat{A} = 71°$.



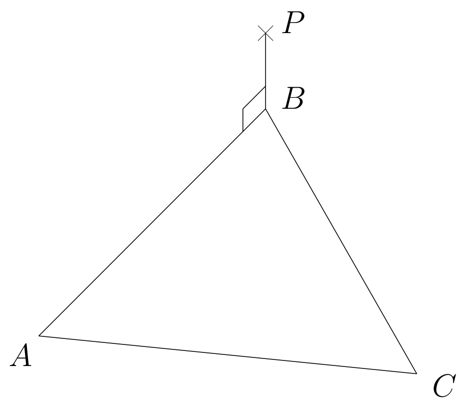
Exercice 8

Le point B est la base d'un phare situé en mer, que l'on a observé depuis les points A et C distants de 1 km.

On a mesuré $\widehat{BAC} = 11,9°$ et $\widehat{BCA} = 67,1°$.

Déterminer les distances AB et BC ainsi que la plus petite distance du phare à la plage.

On a de plus mesuré $\widehat{BCP} = 8,1°$. Déterminer la hauteur du phare.



4 Equations cartésiennes de lieux géométriques

Dans toute cette partie, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 9 Soit $\vec{u}(2;-3)$ et $A(1;2)$.

1) Représenter graphiquement l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \perp \vec{u}$
2) Caractériser analytiquement cet ensemble.

Définition 1
- *On appelle vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ tout vecteur $\vec{u}$ de la forme $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de la droite $\mathcal{D}$.*
- *On appelle vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$ tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.*

Exercice 10

1) Déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par $A(2;3)$ et diriger par le vecteur $\vec{u}(1;2)$.
2) Déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par $B(5;4)$ et de vecteur normal $\vec{v}(2;3)$.

Théorème 11 $\mathcal{D} : ax+by+c=0 \iff \mathcal{D}$ *admet pour vecteur normal le vecteur* $\vec{n}\,(a;b)$
$\iff \mathcal{D}$ *admet pour vecteur directeur le vecteur* $\vec{d}\,(b;-a)$

Remarque : On a bien $\vec{n}\cdot\vec{d} = a\times b + b\times(-a) = 0$: les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{d}$ sont bien orthogonaux !

Exercice 11

Soit les points $A(1;2)$ et $B(4;-2)$.

1) Soit $M(x;y)$. Montrer que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 \iff x^2-5x+y^2=0$.
2) En écrivant le forme canonique de x^2-5x, montrer que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 \iff \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\frac{25}{4}$.

   En déduire que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Théorème 12 *Le cercle de diamètre* $[AB]$ *est l'ensmble des points* M *tels que* $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$.
Dans un repère orthonormal, le cercle de centre $I(x_0;y_0)$ *et de rayon* r *a pour équation* ...

Exercice 12

1) Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}_1$ centré en $A(1;2)$ et de rayon 3.
2) Déterminer la nature de l'ensemble des points $M(x;y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation : $x^2-6x+y^2+2y+1=0$.
3) Déterminer la nature géométrique de l'ensemble d'équation : $x^2+4x+y^2-10y+27=0$.

Exercice 13

(Distance d'un point à une droite) On considère la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $ax+by+c=0$, avec $(a,b)\neq(0,0)$.

Soit A le point de coordonnées $A(x_A;y_A)$, et soit $H(x_H;y_H)$ le projeté orthogonal de A sur la droite $(\mathcal{D})$.

1) Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à $(\mathcal{D})$.
2) En déduire qu'il existe un réel λ tel que $\begin{cases} x_H = x_A+\lambda a \\ y_H = y_A+\lambda a \end{cases}$
3) Déterminer la valeur de λ en fonction de a, b, c, x_A et y_A.
4) En déduire la valeur de la distance AH en fonction a, b, c, x_A et y_A.
5) Justifier que AH est la plus petite distance de A à la droite $(\mathcal{D})$.
6) *Application :* Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $2x+3y+5=0$ et soit $A(4;1)$.
   Déterminer la distance de A à $(\mathcal{D})$. Faire un dessin.