Introduction aux suites numériques

Intérêts simples et composés On dispose d'un capital de 1 000 euros que l'on peut placer de deux façons différentes :

— *à intérêts simples* au taux annuel de 10%. Cela signifie que, chaque année, on percevra le même intérêt I égal à 10% du capital de départ.

— *à intérêts composés* au taux annuel de 4%. Cela signifie que, chaque année, le capital acquis augmente de 4% par rapport au capital de l'année précédente.

On note s_n le capital acquis au bout de n années avec un taux d'intérêts simples, et c_n le capital acquis au bout de n années avec un taux d'intérêts composés.

Ainsi, $s_0 = c_0 = 1000$ est le capital initial, s_1 et c_1 sont les capitaux à la fin de la première année, s_2 et c_2 à la fin de la deuxième année ...

1. Calculer s_1, s_2, s_3 et c_1, c_2, c_3.
2. Calculer s_{20} et c_{20}.
3. Déterminer, au bout de 50 ans, lequel des deux placements est le plus avantageux.
4. Au bout de combien d'années, le capital acquis atteindra-t-il 10 000 euros avec chacun de ces deux placements.

Approximation de la valeur de π. Une des premières utilisations d'une suite de nombres est due à Archimède (physicien, mathématicien et ingénieur grec du $3^{\text{ème}}$ siècle avant J.C.), dans le but de trouver la valeur de π.

Son idée était la suivante : le nombre π étant, par définition, le rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre, il suffit pour le déterminer de calculer cette circonférence.

Il proposa de procéder par étapes qui donnent autant d'approximations successives et de plus en plus proches de la valeur exacte de π :

— calculer le périmètre d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle ;
— calculer le périmètre d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle ;
— calculer le périmètre d'un dodécagone régulier inscrit dans le cercle ;
— ... et ainsi de suite en doublant à chaque étape le nombre de côtés du polygône régulier inscrit dans le cercle.

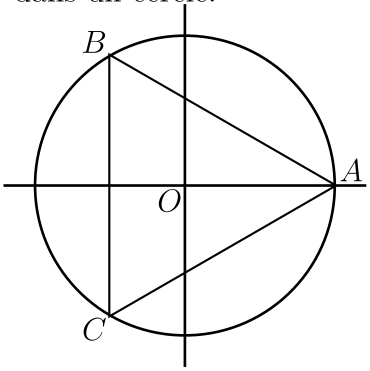
Dans toute la suite on considère un cercle de rayon 1 (cercle trigonométrique).

A chaque étape, pour chaque valeur de l'entier n correspondant, on note H le milieu de $[AB]$, l'angle $\alpha_n = \widehat{AOH}$, la longueur $l_n = AH$, et P_n le périmètre du polygône régulier.

Comme le cercle a pour rayon 1, la valeur approchée de π est alors donnée, à chaque étape, par $\pi \simeq \pi_n = \dfrac{P_n}{2}$.

Compléter les valeurs suivantes *(indication : dans chacun des cas, quelle est la nature du triangle AOB, et donc du triangle AOH ?).*

$1^{\text{ère}}$ approximation, $n = 1$
Triangle équilatéral inscrit
dans un cercle.



Nombre de côtés : ...

$\widehat{AOB} = \ \dots$

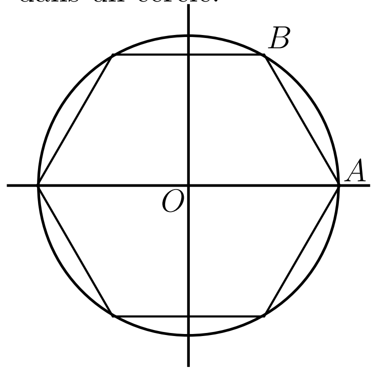
$\alpha_1 = \ \dots$

$l_1 = \ \dots$

$P_1 = \ \dots$

$\pi_1 = \ \dots$

$2^{\text{ème}}$ approximation, $n = 2$
Hexagone régulier inscrit
dans un cercle.



Nombre de côtés : ...

$\widehat{AOB} = \ \dots$

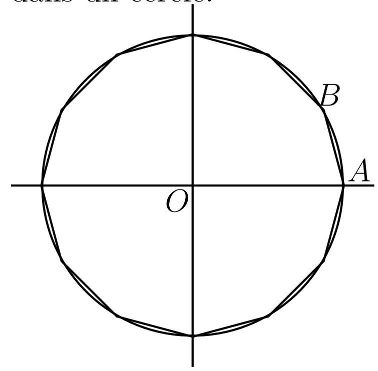
$\alpha_2 = \ \dots$

$l_2 = \ \dots$

$P_2 = \ \dots$

$\pi_2 = \ \dots$

$3^{\text{ème}}$ approximation, $n = 3$
Dodécagone régulier inscrit
dans un cercle.



Nombre de côtés : ...

$\widehat{AOB} = \ \dots$

$\alpha_3 = \ \dots$

$l_3 = \ \dots$

$P_3 = \ \dots$

$\pi_3 = \ \dots$

$n^{\text{ème}}$ approximation Cas général d'un polygône régulier à ...... côtés inscrit dans un cercle.

$\alpha_n = \ \dots$ $\qquad$ $l_n = \ \dots$

$P_n = \ \dots$ $\qquad$ $\pi_n = \ \dots$

Montrer que l'on obtient l'approximation de π : $\quad \pi_n = \dfrac{1}{2} 3.2^n \sin \alpha_n = \pi \dfrac{\sin \alpha_n}{\alpha_n}$

Limite de π_n lorsque $n \to +\infty$

Lorsque $n \to +\infty$, $2^n \to +\infty$, et donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2\pi}{3.2^n} = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

D'après l'expression de π_n, on cherche donc la limite de l'expression $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n}$, ou encore d'après la remarque précédente la limite $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque $x \to 0$.

Soit f une fonction. Que représente le quotient $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$? et la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$?

En déduire alors, en choisissant la fonction $f(x) = \sin x$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, puis $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \pi_n$.

Calculer π_1, π_2, π_3, π_4 et π_5.