Logique et mathématiques

L'étude systématique de la logique commence avec Aristote, philosophe grec du IVe siècle Av. JC. Pour lui, la logique est l'instrument du savoir, non le savoir lui-même. La logique devait permettre de distinguer les raisonnements corrects des raisonnements incorrects.

La logique mathématique, ou logique formelle, est devenue une discipline mathématique à part entière au XIXe siècle, avec les travaux, notamment de Frege, Russell, Peano, Hilbert et Boole.

Déjà au début du XVIIIe siècle, Leibniz (1646-1716, qui a aussi largement contribué aux développements du calcul infinitésimal et différentiel, c'est-à-dire entre autre des calculs actuels sur les dérivées) travaillait sur le traitement formel des mathématiques, et introduisit une grande partie des notations mathématiques modernes, en particulier les quantificateurs.

David Hilbert (1862-1943, mathématicien allemand) a poussé les croyances en la logique mathématique jusqu'à penser que l'ensemble des mathématiques devait (ou du moins pourrait), grâce à un formalisme logique, se construire et se comprendre de manière algorithmique : "Wir müssen wissen, Wir werden wissen".

En 1931, Kurt Gödel mit fin à cette idée en démontrant que, d'une certaine façon, les mathématiques sont "incomplètes", qu'il existe des propositions qui ne peuvent ni être prouvées ni être réfutées.

Quantificateurs. . .

universels. La quantification universelle est représentée en notation mathématique par un A à l'envers : ∀ ("Alle", tous, en allemand). Elle exprime *"pour tout"* ou *"quel que soit"*.

Par exemple, $\forall x \geq 2,\ x^2 \geq 4$.

existentiel. La quantification existentielle est représentée par un E retourné : ∃ ("Existieren", il existe, en allemand). Elle exprime l'existence : *"il existe"*.

Par exemple, $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x + 3 = 0$. (est-ce vrai ?).

Un point d'exclamation suivant ce quantificateur indique l'unicité de l'élément : ∃!

Par exemple, $\exists!\ x \in \mathbb{R},\ 2x^2 + 12x + 18 = 0$ (est-ce vrai ?).

Autre exemple (théorème des valeurs intermédiaires) : Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, strictement monotone sur $[a;b]$, telle que $f(a)\,f(b) < 0$, alors, ("/" se lit *"tel que"*)

$$\exists !\ \alpha \in]a;b[\ /\ f(\alpha) = 0 \qquad \text{(est-ce vrai ?).}$$

Implication. . . la double flèche ⇒ signifie "implique". Par exemple, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 0$, ou encore, si $P(x) = ax^2 + bx + c$, $\Delta \geq 0 \Longrightarrow \exists\ \alpha \in \mathbb{R}\ /\ P(\alpha) = 0$.

On parle aussi de <u>condition nécessaire</u> : si le discriminant Δ est positif ou nul, alors, nécessairement, le polynôme admet une racine (pas forcément unique).

La double flèche dans l'autre sens signifie alors logiquement (?) "est impliqué par", par exemple, $(\exists\ \alpha \in \mathbb{R}\ /\ P(\alpha) = 0) \Longleftarrow \Delta \geq 0$.

On parle dans ce cas de <u>condition suffisante</u> : pour que le polynôme P admette une racine réelle α, il suffit que le discriminant soit positif ou nul.

. . .et équivalence. La double flèche double ⟺ signifie alors, tout aussi logiquement, *"implique"* et à la fois *"est impliqué par"*, et donc en bref *"est équivalent à"*, ou aussi *"si et seulement si"*.

On parle alors tout aussi logiquement de <u>condition nécessaire et suffisante</u>, par exemple,

$$\Big(\exists !\ \alpha \in \mathbb{R}\ /\ P(\alpha) = 0\Big) \Longleftrightarrow \Delta = 0$$

Exercice 1 Ecrire les affirmations suivantes en utilisant les quantificateurs, et indiquer si elles sont vraies ou fausses.

1. Pour tout réel x, si $x \geq 3$ alors $x^2 \geq 5$
2. Pour tout entier naturel n, si $n > 1$, alors $n \geq 2$
3. Pour tout réel x, si $x > 1$, alors $x \geq 2$
4. Pour tout réel x, $x^2 \geq 1$ est équivalent à $x \geq 1$
5. Pour tout entier naturel n, il existe un réel x tel que $x > 2n$
6. Il existe un réel x tel que, pour tout entier naturel n, $x > 2n$
7. Pour tout réel x, pour tout réel y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$
8. Pour tout réel positif x, pour tout réel positif y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$

Exercice 2 Dans une université, deux étudiants, Jean et Julie, ont passé trois examens concernant les trois matières : algèbre, analyse et économie.

Leurs notes sont les suivantes :

	Algèbre	Analyse	Economie
Jean	12	5	16
Julie	14	15	7

Soit $E = \{\text{Jean}; \text{Julie}\}$ l'ensemble des étudiants, et $F = \{\text{algèbre}; \text{analyse}; \text{économie}\}$ l'ensemble des matières. Pour tout x de E et tout y de F, on désigne par $P(x, y)$ l'expression : *"l'étudiant x a la moyenne (10 ou plus) dans la matière y"*.

Expliciter en français les propositions suivantes, puis dire si elles sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in E, \forall y \in F,\ P(x, y)$
2. $\exists x \in E, \exists y \in F,\ P(x, y)$
3. $\exists x \in E, \forall y \in F,\ P(x, y)$
4. $\forall y \in F, \exists x \in E,\ P(x, y)$
5. $\exists y \in F, \forall x \in E,\ \text{non } P(x, y)$
6. $\exists y \in F, \forall x \in E,\ P(x, y)$

Exercice 3 Pour chaque couple P et Q d'assertions suivantes, préciser ce qui est vrai : $P \Rightarrow Q$, $P \Leftarrow Q$ (ou $Q \Rightarrow P$), ou $P \Leftrightarrow Q$.

Cas	Propriété P	Propriété Q
a)	$x = 3$	$x^2 = 9$
b)	$b \neq 0$ et $\frac{a}{b} > 0$	$a > 0$ et $b > 0$
c)	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$	$AB = CD$
d)	$MA = MB$	M est le milieu de $[AB]$
e)	$x \in [0; 2]$	$-1 < x < 3$
f)	Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$. $\Delta < 0$	a et c sont de même signe
g)	Pour tout x réel, $ax^2 + bx + c > 0$	$a > 0$ et $c > 0$
h)	$x^2 - 2x + c$ admet une racine double	$c = 1$

Exercice 4 Cent hommes politiques sont réunis. Chacun d'eux est soit un honnête homme, soit une franche canaille, sachant que :

(1) il y a au moins un honnête homme parmi eux,

(2) si l'on en prend deux au hasard, il y en a toujours au moins un des deux qui est malhhonnête.

Combien d'hommes sont honnêtes dans cette assemblée ?