Logique mathématique - Implication, équivalence $1^{\text{ère}}S$

L'étude systématique de la logique commence avec Aristote, philosophe grec du IVe siècle Av. JC. Pour lui, la logique est l'instrument du savoir, non le savoir lui-même. La logique devait permettre de distinguer les raisonnements corrects des raisonnements incorrects.
La logique mathématique, ou logique formelle, est devenue une discipline mathématique à part entière au XIXe siècle, avec les travaux, notamment de Frege, Russell, Peano, Hilbert et Boole.
Déjà au début du XVIIIe siècle, Leibniz travaillait sur le traitement formel des mathématiques, et introduisit une grande partie des notations mathématiques modernes, en particulier les quantificateurs. David Hilbert (1862-1943, mathématicien allemand) a poussé les croyances en la logique mathématique jusqu'à penser que l'ensemble des mathématiques devait (ou du moins pourrait), grâce à un formalisme logique, se construire et se comprendre de manière algorithmique : "Wir müssen wissen, Wir werden wissen".
En 1931, Kurt Gödel mit fin à cette idée en démontrant que, d'une certaine façon, les mathématiques sont "incomplètes", qu'il existe des propositions qui ne peuvent ni être prouvées ni être réfutées.

Implication

- La flèche "$\Longrightarrow$" signifie "implique" ou "entraîne".
  Par exemple, $n\in\mathbb{N}\Longrightarrow n\geqslant 0$: "n est un entier naturel implique que n est positif ou nul" ou encore, "si n est un entier naturel, alors n est positif ou nul"

  On parle aussi de **condition suffisante** : "Il suffit que $n\in\mathbb{N}$ pour que $n\geqslant 0$".
- La flèche "$\Longleftarrow$" signifie alors logiquement "est impliqué par", ou "est entraîné par".
  Par exemple, $n\geqslant 0\Longleftarrow n\in\mathbb{N}$".

  On parle aussi de **condition nécessaire** : "Il est nécessaire que $n\geqslant 0$ pour que $n\in\mathbb{N}$" *(mais cela ne suffit pas...)*.

Equivalence La double flèche " $\Longleftrightarrow$ " signifie à la fois "implique" et "est impliqué par", et donc "est équivalent à", ou encore "si et seulement si".

On parle donc aussi de **conditon nécessaire et suffisante** (ou **CNS**).

Exercice 1 Soit les assertions : A="il fait beau" et B="je suis à la plage".

Traduire : $A\Longrightarrow B$: • Si ...., alors ....
• Il est nécessaire que ....pour que ....
• Il est suffisant que ....pour que ....

On suppose qu'on a la propriété $A\Longrightarrow B$. Que peut-on en déduire alors si :

⋆ Je ne suis pas à la plage : ....

⋆ Je suis à la plage : ....

Exercice 2 Compléter par $\Longrightarrow$", "$\Longleftarrow$", " $\Longleftrightarrow$ ".
Lorsqu'il n'y a pas équivalence, donner un contre exemple.

$n\geqslant 0$		$n\in\mathbb{N}$
$x^2=1$		$x=1$
$x^2>1$		$x>1$

$a>0$ et $b>0$		$ab>0$
$a>0$ et $b>0$		$a+b>0$
$x\geqslant 0$ et $x^2=1$		$x=1$
$(x-3)(2x+1)=0$		$x=3$
$x\geqslant 3$		$x\geqslant 5$
$x\in\mathbb{N}$ et $x>3$		$x\geqslant 4$
$x\in[0;2]$		$-1<x<3$
$x^2\in[0;9]$		$0\leqslant x\leqslant 3$
$2x^2+x=0$		$x=-\dfrac{1}{2}$
$MA=MB$		M est le milieu du segment $[AB]$
$AB=CD$		$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$
ABC triangle rectangle en B		$AB^2+BC^2=AC^2$

Exercice 3   Chercher l'erreur

1. On cherche à résoudre l'équation (E) : $x^2+x+1=0$ dans $\mathbb{R}^*$ (car, assez évidemment $x=0$ n'est pas solution).
   $(E)\Longrightarrow x(x^2+x+1)=x^3+x^2+x=0$ et $(E)\Longrightarrow x^2+x=-1$
   Ainsi, $x^3+x^2+x=x^3-1=0$
   $\Longrightarrow x^3=1$
   $\Longrightarrow x=1$
   Donc l'équation (E) a une unique solution : $\mathcal{S}=\{1\}$.

   Ainsi, si on remplace $x=1$ dans l'équation (E) : $x^2+x+1=1^2+1+1=3=0$! ! !
2. On considère le nombre $X=-\dfrac{1}{2}$.

   $X=-\dfrac{1}{2}\iff 2x=-1$
   $\iff 2X+1=0$
   $\iff X^2+2X+1=X^2$ (en ajoutant X^2 de part et d'autre)
   $\iff (X+1)^2=X^2$
   $\iff X+1=X$
   $\iff 1+0$! ! !
3. Soit deux nombres réels a et b tels que $a=b$.
   Alors, en muliplant par b, $ab=b^2$,
   $\Longrightarrow a^2-ab=a^2-b^2$
   $\Longrightarrow a(a-b)=(a-b)(a+b)$
   $\Longrightarrow a=a+b$ (en simplifiant par $(a-b)$)
   $\Longrightarrow a=2a$
   $\Longrightarrow 1=2$! ! !