Calcul Matriciel

I Introduction

Si les matrices sous leur formalisme actuel datent du début du XXe siècle, avec notamment l'appui de Heisenberg, l'intérêt pour les «tableaux de chiffres » est bien plus ancien.
Par exemple, le problème des « carrés magiques » intriguait déjà les mathématiciens chinois en 650 av. J.-C. et les systèmes d'équations linéaires furent complètement résolus avec les matrices trois siècles plus tard. La méthode de Cramer (1750) en est l'équivalent moderne.

En 1925, Heisenberg utilise la théorie des matrices pour formuler la mécanique quantique (d'ailleurs alors aussi appelée "mécanique des matrices"...), ancrant définitivement dans l'esprit des mathématicien l'intérêt indéniable de ces objets, et convaincant les physiciens de l'efficacité de son utilisation. Dans les années qui suivent, de nombreux résultats furent découverts, en cryptographie, en calcul, en théorie des graphes, en optique...

La décomposition de matrices est encore actuellement un thème de recherche. De telles opérations permettent par exemple
- de diminuer le temps de calcul informatique de simulations numériques de phénomènes physiques, économiques, ..., et donc de permettre d'en réaliser de plus précises, plus complexes et donc plus réalistes.
- de séparer le bruit d'une image (décomposition en valeurs singulières),
- de repérer les caractéristiques d'un code génétique ou d'étudier automatiquement des données statistiques (analyse en composantes indépendantes)
- ...

Carrés magiques. Compléter le tableau suivant avec les nombres de 1 à 9 de telle manière que la somme des nombres sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale soit égale à 15.

2		
	5	
4		

On peut de même rechercher un carré magique d'ordre 4, les sommes étant cette fois de 34 :

16	3		
	10		
4		14	1

(la somme des quatre chiffres figurant dans les quatre cases centrales ou encore dans les quatre cases d'angle vaut aussi 34)

Image numérique. On peut représenter numériquement une image en découpant celle-ci suivant une grille comportant un certain nombre de lignes et de colonnes.
En associant chaque couleur à un nombre, puis un nombre à chaque "case" de cette grille, usuellement appelée pixel (pour *picture element*), on reconstitue ainsi l'image.
La dimension du pixel et le nombre utilisé (donc le nombre de lignes et de colonnes) donne la qualité de définition de l'image. Par exemple, les appareils photo numériques actuels sont équipés de capteur de quelques mégapixels (c'est-à-dire millions de pixels).

II Définitions

Définition: *Soient n et p deux entiers naturels non nuls.*
Une matrice de dimension $n \times p$ est un tableau de réels à n lignes et p colonnes.

Ex : $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension $\ldots \times \ldots$.

Soit $A(1,1,1)$ et $B(1,2,3)$ deux points de l'espace; A et B peuvent être considérés comme des matrices de dimension $\ldots \times \ldots$, et le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme une matrice de dimension $\ldots \times \ldots$.

Notation: *Si A est une matrice de dimension $n \times p$, on note $a_{i,j}$ le terme de la ligne i et de la colonne j.*
On a ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

$a_{i,j}$ est le terme général de la matrice A.
On note aussi, plus simplement, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Ex : Soit A la matrice de dimension 3×4 définie par $a_{i,j} = i + j$, alors $A = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

Cas particuliers : Soit M une matrice de taille $n \times p$:

- Si $n = p$, alors M est une matrice carrée d'ordre n ;
- Si $n = 1$, M est un vecteur ligne de dimension p; (par exemple, les points A et B précédents)
- Si $p = 1$, M est un vecteur colonne de dimension n. (par exemple le vecteur $\overrightarrow{AB}$ précédent).

Définition: *Soit A une matrice de dimension $n \times p$. On appelle transposée de la matrice A, notée ${}^tA$, la matrice de dimension $p \times n$ dont les lignes sont les colonnes de A.*

Ex : $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, alors ${}^tM = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors ${}^tN$ est une matrice de dimension $\ldots \times \ldots$, et ${}^tN = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$

III Opérations sur les matrices

1 Egalité de deux matrices

Définition: *Soient A et B deux matrices de dimension $n \times p$, $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. Dire que $A = B$ signifie que A et B sont de même dimension, et que $a_{i,j} = b_{i,j}$, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.*

Ex : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est équivalent à $a = 2$, $b = 3$, $c = -5$, ...

2 Addition de deux matrices

Définition: *Soient A et B deux matrices de même dimension $n \times p$. La somme $A + B$ est la matrice obtenue en additionnant deux à deux les termes qui ont la même position dans A et B.*
Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, alors $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$.

Ex : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ alors, $A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 3-4 & -5+7 \\ -1+0 & 0+3 & 6-2 \end{pmatrix}$

Ex : $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ alors, $A + B = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix}$

3 Multiplication d'une matrice par un réel

Définition: *Soit A une matrice $n \times p$. Le produit de la matrice A par le réel k est la matrice $n \times p$, notée kA, obtenue en multipliant chaque terme de A par k.*

Ex : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, alors, $3A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, alors, $-2B = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix}$

Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 10 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, alors $3C = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix}$, et, $D = 3C - 2B = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix}$

Peut on calculer la matrice $E = 3A + B$?

Ex : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -12 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice C telle que $A + C = B$.

Ex : Soit les vecteurs de l'espace $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$.

IV Multiplication de matrices

1 Multiplication par un vecteur colonne

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ alors la matrice produit, notée $A \times B$, est obtenue suivant :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 2 - 5 \times (-4) \\ -1 \times 1 + 0 \times 2 + 6 \times (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -25 \end{pmatrix} \end{array}$$

2 Multiplication de deux matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, de dimension 3×2, et $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, de dimension 2×2,
alors la matrice produit, notée $A \times B$, est obtenue suivant :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2\times 2 + 3\times(-4) & 2\times 5 + 3\times 1 \\ -5\times 2 - 1\times(-4) & -5\times 5 - 1\times 1 \\ 0\times 2 + 6\times(-4) & 0\times 5 + 6\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 13 \\ -6 & -26 \\ -24 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriété: *Le produit $A\,B$ des deux matrices A et B existe si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B, i.e. si A est de dimension $n \times p$ et B de dimension $p \times q$.*
La matrice produit est alors de dimension $n \times q$.

Ex : Le produit d'une matrice 3×5 par une matrice 5×7 est une matrice de dimension 3×7.

Ex : Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Quelle est la dimension de la matrice produit $A\,B$?

Peut-on calculer la matrice produit $B\,A$?

Calculer $A\,B$.

Ex : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Quelles sont les dimensions des matrices produits $A\,B$ et $B\,A$?

Calculer les produits $A\,B$ et $B\,A$.

Ex : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer les dimensions des matrices produits $A\,B$ et $B\,A$, puis les calculer.

Ex : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$. Déterminer les dimensions de la matrice A^2, puis la calculer.

Ex : Soit a un réel, $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$, et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Calculer NA.
b) En déduire que $N^2 = 2N$, puis exprimer N^3, N^4 et N^5 en fonction de N.
c) Quelle conjecture peut-on alors faire au sujet de N^p, pour tout entier p ?

3 Matrice unité

Définition: *On note I_n la matrice carrée d'ordre n qui comporte des 1 sur sa diagonale, et des zéros partout ailleurs.*

Ex : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad I_3 = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ $\quad I_4 = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

Ex : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les produits $A\,I_2$ et $I_2\,A$.

Propriété: *Pour toute matrice carrée A d'ordre n, on a $A \times I_n = I_n \times A = A$.*

V Systèmes d'équations et matrices

1 Ecriture matricielle d'un système

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$, et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $A\,X = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ et donc l'égalité matricielle $AX = B$ est équivalente à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \qquad = \\ \qquad = \end{array} \right.$$

Resoudre ce système.

Ecrire sous forme matricielle les systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 5 \\ -x & + & 7y & = & -12 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} 5x & - & 3y & = & 5 \\ -2x & + & 9y & = & -14 \\ 5x & - & 2y & = & 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & - & t & = & 5 \\ -x & + & 7y & + & 3z & - & 4t & = & -12 \\ x & - & y & - & z & - & t & = & 1 \\ -2x & + & 3y & + & 2z & - & 7t & = & 24 \end{array} \right.$$

2 Matrice inverse

Définition: *Soit A une matrice carrée d'ordre n, et I_n la matrice unité d'ordre n.*
On appelle matrice inverse de A, lorsqu'elle existe, la matrice notée A^{-1} telle que

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$$

.
On dit alors que la matrice A est inversible.

Ex : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

3 Résolution de systèmes linéaires

Propriété: *Soit A une matrice carrée inversible, alors le système $AX = B$ admet une solution unique donnée par : $X = A^{-1}B$.*

Résoudre les systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & 5y & = & 3 \\ 3x & + & 8y & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 7 \\ -x & + & 6y & = & 5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 9 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & -6 \\ & & x & - & z & = & 6 \end{array} \right.$$