Travaux Pratiques 1/2

MODÉLISATION ET SIMULATION

Semestre 3

Année 2020-2021

Yoann Morel

TP 0 Scilab

Dans son utilisation la plus simple, Scilab est une "super-calculatrice". Au prompt "`-->`", on peut saisir des commandes, calculs, ...Scilab retourne alors ce qu'il en pense, après "`ans =`" (pour **ans**wer).

Par exemple, saisir successivement :

```
-->a=5+12.3
-->sqrt(12)
-->(1+%i)^3
```

ou encore,

```
-->A=3;
-->x=[-2*%pi:0.01:2*%pi];
-->y=A*cos(2*x);
-->plot(x,y);
```

Le "`;`" à la fin d'une ligne permet de ne pas afficher la réponse d'une instruction.

On peut aussi saisir les instructions précédentes dans un script. Saisir pour cela la commande "`edit`" (ou dans la barre de menus, "`Applications` → `SciNotes`").

Saisir, ou copier, les lignes précédentes et enregistrer le fichier sous le nom "`prog.sce`". Exécuter enfin ce script, soit à partir de l'icone ad-hoc de la fenêtre de l'éditeur, soit en tapant dans la fenêtre de commandes de Scilab la commande "`exec('prog.sce',-1)`".

Que calculent les programmes suivants ? Les saisir et les exécuter.

```
u=0;n=10;
for i=1:n
    u=2/3*u-1/6
    disp(i,u)
end
```

```
s=0;n=10;
for i=1:n
     s=s+i
end
disp(s)
```

Exercice 1 : Calculer les sommes $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{2^n}$ et $T = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour différentes valeurs de n $(10, 100, \dots, 10^6, \dots)$.

Dans les exemples précédents, on peut aussi créer un vecteur (ou matrice, ou encore tableau) contenant les valeurs de la suite :

```
u=0;n=10;
for i=1:n
     V(i)=u
     u=2/3*u-1/6
end
plot(V)
```

ou

```
V(1)=0;n=10;
for i=1:n
     V(i+1)=2/3*V(i)-1/6
end
plot(V)
```

Exercice 2 : À partir de l'exercice 1 précédent, tracer sur un graphique

a) les valeurs de la somme S en fonction de n ;

b) les valeurs de la somme T en fonction de n, et superposer sur ce même graphique la courbe du logarithme népérien (`log`)

   Que remarque-t'on ? Tracer enfin sur un autre graphique l'évolution de l'écart, en fonction de n, entre $T(n)$ et $\log(n)$.

Exercice 3 : Soit la suite définie par $u_1 = 0.2$ puis, pour tout entier n, $u_{n+1} = r u_n (1 - u_n)$.
Écrire un programme qui calcule est représente graphiquement les 50 premiers termes de la suite (u_n) dans les trois cas : $r = 3$, $r = 3.5$ et $r = 4$.
Représenter graphiquement, sur une autre figure et dans les mêmes trois cas, les termes u_{950} à u_{1000}.

Les programmes précédents utilisent des boucles itératives : on effectue les instructions dans la boucle un nombre fixé de fois (n ici), défini à l'avance.

Les **boucles conditionnelles**, `while ...`, permettent d'effectuer des instructions "en boucle" sans nécessairement en connaître le nombre dès le début.

Par exemple, si on cherche le nombre de termes dans la somme T avant de dépasser 10, on peut procéder ainsi :

```
T=0;i=0;
while T<10
     i=i+1
     T=T+1/i
end
disp(i)
```

Exercice 4 : Une fine couche d'épaisseur 1cm d'un certain matériau absorbe 5% de l'intensité sonore, en dB, qui la traverse.

Combien de couches, et donc quelle épaisseur, de ce matériau faut-il pour qu'un son d'une intensité de 140 dB soit atténué en moins 40 dB ?

Tracer sur un graphique l'intensité sonore en fonction du nombre de couches traversées.

TP 1
Résolution d'une équation
Résolution d'une équation différentielle

Ce TP comporte 2 parties. Dans la première, vous résoudrez l'équation $\sin x = 0$ sur l'intervalle $[3,4]$ à l'aide de 3 méthodes numériques : **la méthode de Dichotomie, la méthode de Newton et la méthode de la sécante**. Dans la deuxième, vous serez amenés à résoudre une équation différentielle du 1er ordre à l'aide des méthodes d'Euler et de Runge Kutta.
Tous ces algorithmes seront programmés à partir du logiciel Scilab (utilisé en 1ère année).

I - Résolution d'une équation

On cherche à résoudre l'équation $\sin x = 0$ sur l'intervalle $[3,4]$.

1) Programmez la méthode de dichotomie pour résoudre le problème posé. Le calcul sera effectué jusqu'à ce que la différence entre les bornes de l'intervalle dans lequel se trouve la solution atteigne 10^{-4}. La solution de l'équation sera alors approchée par $(a+b)/2$, a et b étant les bornes du dernier intervalle obtenu. Combien d'itérations ont elles été nécessaires ?
2) Programmez l'algorithme de Newton. Notons (x_n) la suite convergente vers la solution. La solution approchée de l'équation, x_n, sera celle obtenue lorsque $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$.
   Soit $x_0 = 4$ la valeur initiale. Donnez la valeur approchée de la solution et le nombre nécessaire d'itérations pour l'atteindre.
3) Même question que la précédente en s'appuyant sur la méthode de la sécante avec les valeurs initiales $x_0 = 3$ et $x_1 = 4$.

II - Résolution d'une équation différentielle

On cherche à résoudre l'équation différentielle : $y' + y^2 = 0$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

1) Calculez la solution exacte de cette équation
2) Calculez la solution $y(x)$ à l'aide de la méthode d'Euler et en déduire une valeur approchée de $y(1)$ et $y(3)$ pour un pas h égal à $0,1$ puis pour un pas égal à $0,01$.
3) Même question que la précédente mais en utilisant la méthode Runge Kutta d'ordre 2 (Euler améliorée).

4) Comparez les résultats obtenus avec Euler et avec Euler amélioré et conclure.
Rappel : l'algorithme d'Euler amélioré nécessite 2 fois plus d'opérations que l'algorithme d'Euler.

5) Pour améliorer les méthodes de Runge Kutta d'ordres 1 et 2, il est courant d'utiliser une méthode de Runge Kutta d'ordre 4. L'idée est d'introduire des points intermédiaires supplémentaires

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\Big(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + 1k_3\Big)$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} k_0 = \varphi\left(x_i; y_i\right) \\ k_1 = \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_0\right) \\ k_2 = \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = \varphi\left(x_i + h; y_i + hk_2\right) \end{array}\right.$$

6) Rassemblez les résultats des 3 questions précédentes dans le tableau suivant en écrivant les solutions à 10^{-5} près :

	h	$y(1)$	$y(3)$
Solution exacte			
Euler	$0,1$		
Euler	$0,01$		
Runge Kutta d'ordre 2	$0,1$		
Runge Kutta d'ordre 2	$0,01$		
Runge Kutta d'ordre 4	$0,1$		
Runge Kutta d'ordre 4	$0,01$		

TP 2

Calcul d'une intégrale
Résolution d'équations différentielles

Ce TP est divisé en 3 parties. Dans la première, vous résoudrez une équation différentielle du 1er ordre à l'aide de la méthode de Runge Kutta. Dans une deuxième, vous calculerez une intégrale à l'aide de différentes méthodes numériques : **méthode des rectangles, méthode des trapèzes et méthode de Simpson**. Dans la troisième, vous résoudrez une équation différentielle à l'aide d'un schéma aux différences finies.

Pour ce TP, tous les programmes seront écrits à partir du logiciel Scilab.

I - Résolution d'une équation différentielle

1) Résoudre analytiquement l'équation $y' + xy^2 = 0$ avec $y(0) = 1$.
2) En adaptant la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 mise au point dans le TP n°1, calculez une valeur approchée à 10^{-5} près de $y(1)$ (on prendra un pas h égal à $0,01$) où y est la fonction solution de l'équation $y' + xy^2 = 0$ avec $y(0) = 1$.

   En déduire l'erreur relative obtenue sur la solution au point $x = 1$.

II - Calcul d'une intégrale

On propose de calculer l'intégale $I = \displaystyle\int_0^2 e^{2x}dx$.

Dans tous les calculs, l'intervalle $[0, 2]$ sera découpé en N intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ réguliers. Le pas $h = x_{i+1} - x_i$ est donc constant. On reportera tous les résultats approchés à 10^{-4} dans le tableau ci-dessous.

1) Calculez la valeur exacte de I ; reporter dans le tableau une valeur approchée à 10^{-4}.
2) Calculez I à l'aide de la méthode des rectangles à gauche.
3) Calculez I à l'aide de la méthode des rectangles à droite.
4) Calculez I à l'aide de la méthode des trapèzes.
5) Calculez I à l'aide de la méthode de Simpson.

	N	h	I	Erreur relative (%)
Solution exacte				
Rectangle à gauche	20			
Rectangle à gauche	200			
Rectangle à droite	20			
Rectangle à droite	200			
Trapèzes	20			
Trapèzes	200			
Simpson	20			
Simpson	200			

Remarque : pour calculer l'erreur relative, on s'appuiera sur la valeur "exacte" calculée à la question 1).

III - Résolution d'une équation différentielle à l'aide d'un schéma aux différences finies

On se propose de résoudre l'équation : $y'' + y' - 2y = 0$ avec les conditions $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$.

1) Retrouver la solution analytique de cette équation.

2) On va mettre en place un schéma numérique pour approcher la solution de l'équation. Pour cela, on prendra un pas noté h et on notera classiquement y_i la solution en un point $x_i = i * h$.
À partir d'un schéma décentré avancé, déduire que $y(h) = 3$.
À partir d'un schéma décentré avancé pour estimer y' et d'un schéma vu en cours pour estimer y", écrire le schéma numérique qui permet de calculer la solution y_{i+1} en fonction de y_i et y_{i-1}.

3) Programmer ce schéma avec le logiciel Scilab et remplissez le tableau suivant (on approchera les valeurs à 10-5) :

	h	$y(1)$	Erreur relative
Solution exacte			
Modèle numérique	$0,1$		
Modèle numérique	$0,01$		
Modèle numérique	$0,001$		

TP 3 Résolution de systèmes d'équations linéaires Méthode des moindres carrés

Ce TP a pour but de résoudre des systèmes d'équations linéaires à l'aide de méthodes directes : **la méthode de Gauss et la méthode de Gauss-Jordan**.
Dans une dernière partie, vous définirez une droite des moindres carrés. Dans ce TP, vous utiliserez un tableur (LibreOffice, Excel, ...). Les résultats seront arrondis à 10^{-3} dans le compte-rendu.

I - Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode de Gauss

Considérons une expérience dont les résultats dépendent de la valeur d'un paramètre x. Les résultats expérimentaux obtenus pour x égal à 1, 2 et 3 donnent respectivement comme valeurs 0, 5 et 12. Nous savons que la fonction solution recherchée peut se mettre sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $ax^2 + bx + c$

1) Écrire le système d'équations reliant a, b et c et le résoudre sur votre compte-rendu.

2) Résoudre, à partir d'une feuille de calcul, le système par la méthode de Gauss.

3) En reprenant la feuille de calcul, calculez la solution du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

II - Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode de Gauss-Jordan

1) Résoudre, à partir d'une feuille de calcul, le système précédent par la méthode de Gauss-Jordan.

2) En utilisant la même feuille de calcul, résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

III - Droite des moindres carrés

1) Ajustement affine

Pour un ensemble de points de coordonnées $(x_i; y_i)$ on rappelle que la droite des moindres carrés a pour équation $y = ax + b$ avec

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \quad \text{et} \quad b = \overline{y} - a\overline{x}$$

en notant $\overline{x}$ la moyenne des valeurs x_i, $\overline{y}$ la moyenne des valeurs y_i, $\overline{xy}$ la moyenne des valeurs $x_i y_i$, et $\overline{x^2}$ la moyenne des valeurs x_i^2.

1) À partir d'une feuille de calcul créer le tableau des coordonnées de 7 points :

$$(1, 3),\ (2, 4),\ (3, 9),\ (4, 8),\ (5, 12),\ (6, 11),\ (7, 18).$$

Calculer les coefficients a et b de la droite des moindres carrés (on utilisera la fonction *SOMME*).

2) Tracer sur votre feuille la droite des moindres carrés et l'ensemble des 7 points $(x_i; y_i)$.

3) Vérifier votre tracé et votre calcul précédent en traçant les points sur le tableur et en rajoutant une courbe de tendance ad'hoc.

2) Ajustement exponentiel : durée de vie et maintenance d'équipements.

On s'interesse à la durée de vie d'appareils mécaniques, entre autre en vu de la planification de la maitenance / remplacement des appareils.

Les pourcentages $R(t_i)$ des appareils mécaniques encore en service après un nombre t_i d'heures de fonctionnement ont été relevés et notés dans le tableau suivant :

t_i	100	200	300	400	500	600	750	1000	1500
$R(t_i)$	0,80	0,64	0,52	0,40	0,32	0,28	0,20	0,12	0,04

1. Saisir les coordonnées des points correspondants, les tracer dans une feuille de calcul.
   Un ajustement affine semble-t'il pertinent ? Justifier précisément.
2. On pose $y_i = \ln R(t_i)$. Représenter graphiquement le nuage de points M_i de coordonnées $(t_i; y_i)$.
3. Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage de points ?
   Donner l'équation de la droite de régression de y en t.
   En déduire une expression de la forme $R(t) = ke^{-\lambda t}$, avec k et λ des constantes.
4. Déterminer à l'aide du modèle précédent, le nombre d'équipements encore en service au bout de 900 heures de fonctionnement.
5. À l'aide de ce modèle, déterminer à partir de quand le pourcentage d'appareils encore en fonctionnement sera inférieur à 1%.