Résolution de systèmes linéaires

IUT SGM

Y. Morel

2020/2021

https://xymaths.fr/

Exemple : résolution d'un système linéaire $n = 3$ équations et $n = 3$ inconnues

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & 4z & = & 8 \\ 3x & + & 3y & - & 5z & = & 14 \\ 4x & + & 5y & - & 2z & = & 16 \end{array}\right.$$

ou, écrit sous forme matricielle : $AX = B$, d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$,

et avec les matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$.

Problème général, n quelconque (100, 10^6 ...)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

ou, sous forme matriciel : $AX = B$, d'inconnue $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$,

avec les matrices $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$

Résolution facile lorsque :

- A diagonale : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

  alors le système

$$AX = B \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & & & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 & & = & b_2 \\ \dots & & \dots & & \\ & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

  se résout immédiatement : $x_i = b_i / a_{ii}$

- A triangulaire : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$

  alors le système

$$AX = B \iff \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ 0 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & & & & & & & \\ & & & & \dots & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

  se résout aussi facilement en commeçant par la fin : $x_n = b_n/a_{nn}$, puis l'équation précédente, d'inconnues x_n et x_{n-1}, etc ...

Principe du pivot de Gauss : triangulariser A

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & 4z & = & 8 \\ 3x & + & 3y & - & 5z & = & 14 \\ 4x & + & 5y & - & 2z & = & 16 \end{array}\right.$$

1^{er} pivot : $\boxed{2}$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \boxed{2}x & + & y & - & 4z & = & 8 \\ 0 & + & 3/2y & + & z & = & 2 \\ 0 & + & 3y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \times \dfrac{3}{2} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \times \dfrac{4}{2} \end{array}$$

2ème pivot : $\boxed{\frac{3}{2}}$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & 4z & = & 8 \\ 0 & + & \boxed{3/2}\,y & + & z & = & 2 \\ 0 & + & 0 & + & 4z & = & -4 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \times \frac{3}{\frac{3}{2}}$$

3ème, et dernier, pivot : $\boxed{4}$.

On résout enfin le système triangulaire, en remontant :

$$\left\{\begin{array}{ccl} z & = & \frac{1}{4}(-4) = -1 \\ y & = & \frac{1}{\frac{3}{2}}(2 - z) = 2 \\ x & = & \frac{1}{2}(8 - y + 4z) = 1 \end{array}\right.$$

Algorithme

Pour un système linéaire à n équations et inconnues :

//Triangularisation

Pour i de 1 à $n-1$
    $p = a_{i,i}$ // le pivot
    Pour j de $i+1$ à n
        $c = a_{j_i}$
        Pour k de i à n
            $a_{j,k} = a_{j,k} - a_{i,k} \times \dfrac{c}{p}$
        Fin
        $b_{j+1} = b_j - b_i \times \dfrac{c}{p}$
    Fin
Fin

//Puis la résolution :

$x_n = b_n / a_{n,n}$
Pour i de $n-1$ à 1
    $X = b_i$
    Pour k de $i+1$ à n
        $X = X - a_{i,k} x_k$
    Fin
    $x_i = X / a_{i,i}$
Fin

Gauss-Jordan ou variante du pivot de Gauss :

Diagonalisation

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & 4z & = & 8 \\ 3x & + & 3y & - & 5z & = & 14 \\ 4x & + & 5y & - & 2z & = & 16 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 1/2y & - & 2z & = & 4 \\ 0 & + & 3/2y & + & z & = & 2 \\ 0 & + & 3y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

et on traite la 1ère et la 3ème ligne

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 0 & - & 7/3z & = & 10/3 \\ 0 & + & y & + & 2/3z & = & 4/3 \\ 0 & + & 0 & + & 4z & = & -4 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 1/2L_2 \\ L_2 \leftarrow \dfrac{L_2}{3/2} \\ L_3 \leftarrow 3L_2 \end{array}$$

puis la 2ème et 1ère

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 0 & + & 0 & = & 1 \\ 0 & + & y & + & 0 & = & 2 \\ 0 & + & 0 & + & z & = & -1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 7/3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2/3L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3/4 \end{array}$$

et la solution est sous nos yeux...

Propriété

Pour toute matrice A carrée, symétrique et définie positive, il existe une matrice L triangulaire inférieure telle que $A = LL^T$

On a alors

$$\begin{aligned} AX = B \quad \Longleftrightarrow \quad LL^T X &= B \\ \Longleftrightarrow \quad L\ \ Y \quad &= B \quad , \text{ avec } Y = L^T X \end{aligned}$$

On résout donc tout d'abord le système triangulaire $LY = B$, puis, connaissant Y, on trouve X solution de $L^T X = Y$.

On résout alors en fait deux systèmes, mais très simples car triangulaires.

Cette factoristion est particulièrement intéresante si on doit résoudre un grand nombre de fois des systèmes avec la même matrice A (mais des seconds membres B différents).