Résolution approchée d'équations

IUT SGM

Y. Morel

https://xymaths.fr/

On considère par exemple l'équation (E) : $e^x = x + 2$.
On ne sait pas résoudre analytiquement cette équation.

Exercice 1 :

1. Cette équation admet-elle une/des solution(s) ?
   Montrer que la réponse est affirmative.
   (Astuce : étudier la fonction $f(x) = e^x - x - 2$)
2. Donner une localisation "grossière" des solutions.
   Donner un encadrement plus précis, à une unité près, de ces solutions.
3. Donner un encadrement à 10^{-1} près de ces solutions, puis 10^{-2}, ...

On considère par exemple l'équation $(E) : e^x = x + 2$.
On ne sait pas résoudre analytiquement cette équation.

Exercice 1 :

1. Cette équation admet-elle une/des solution(s) ?
   Montrer que la réponse est affirmative.
   (Astuce : étudier la fonction $f(x) = e^x - x - 2$)
2. Donner une localisation "grossière" des solutions.
   Donner un encadrement plus précis, à une unité près, de ces solutions.
3. Donner un encadrement à 10^{-1} près de ces solutions, puis 10^{-2}, ...

L'objectif de ce chapitre est de donner des méthodes numériques de résolution approchée d'équations.

Toutes les méthodes présentées sont **itératives**, c'est-à-dire qu'elles consistent en la construction d'une suite de valeurs (x_n) qui converge vers la solution recherchée.

On peut facilement écrire toute équation sous la forme $f(x) = x$.

Toute équation, par exemple sous la forme $g(x) = 0$ s'écrit

$$f(x) = g(x) + x = x$$

et les racines de g sont exactement les points fixes de f.

Par exemple, $(E) : e^x = x + 2 \iff f(x) = x$ avec $f(x) = e^x - 2$.

La méthode du point fixe est une méthode itérative : on part d'une valeur initiale x_0, puis on construit la suite de valeurs (x_n) par la relation de récurrence

$$x_{n+1} = f\left(x_n\right)$$

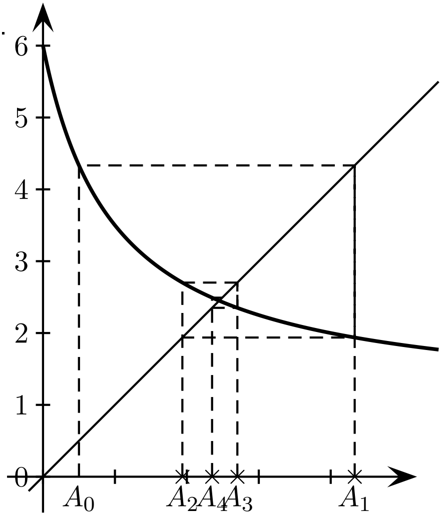
Si la fonction f est continue, et les valeurs ainsi construites convergent vers une limite l, alors on a nécessairement

$$l = f(l)$$

de sorte que chaque valeur x_n est une valeur approchée du point fixe et donc d'une solution de l'équation.

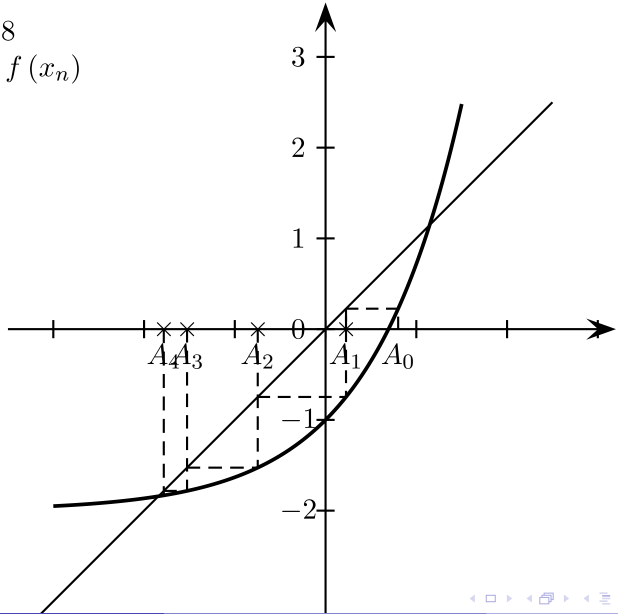
Point fixe : $f(x) = x$ avec $f(x) = 1 + \dfrac{5}{x+1}$

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{2} \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$



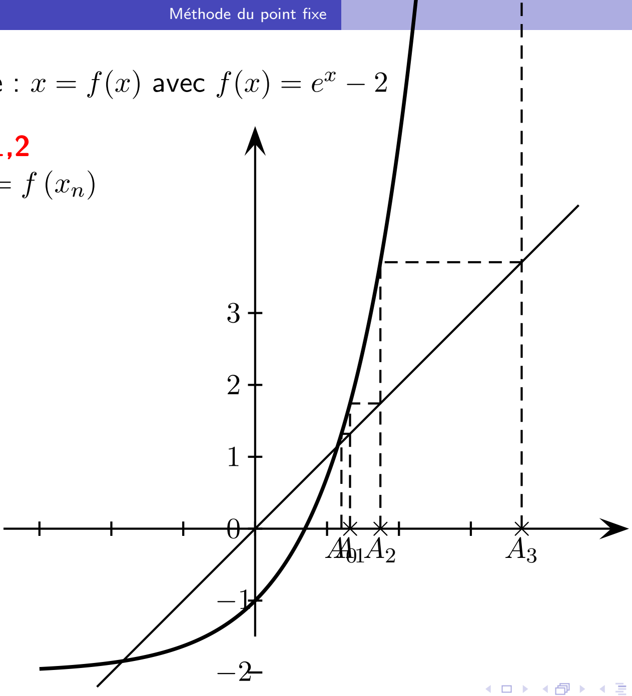
Point fixe : $x = f(x)$ avec $f(x) = e^x - 2$

$$\begin{cases} x_0 = 0,8 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$



Point fixe : $x = f(x)$ avec $f(x) = e^x - 2$

$$\begin{cases} x_0 = \textcolor{red}{\mathbf{1{,}2}} \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$



Condition nécessaire de convergence : $|f'(x)| < 1$

Exercice 2 :

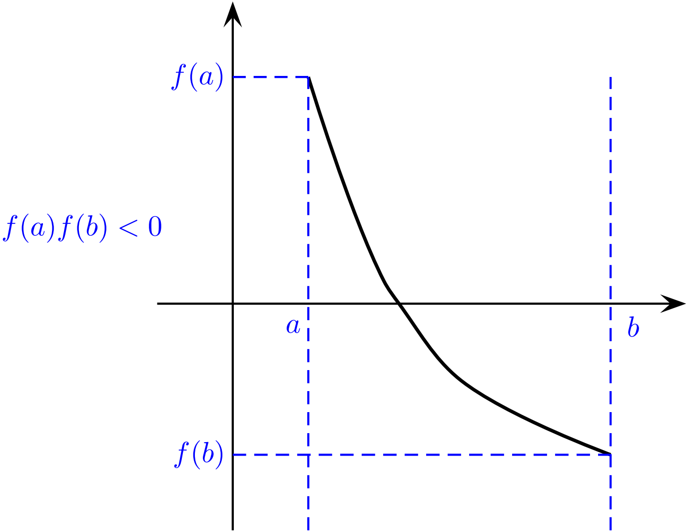
En utilisant la méthode itérative du point fixe, déterminer une solution approchée près d'une solution de l'équation

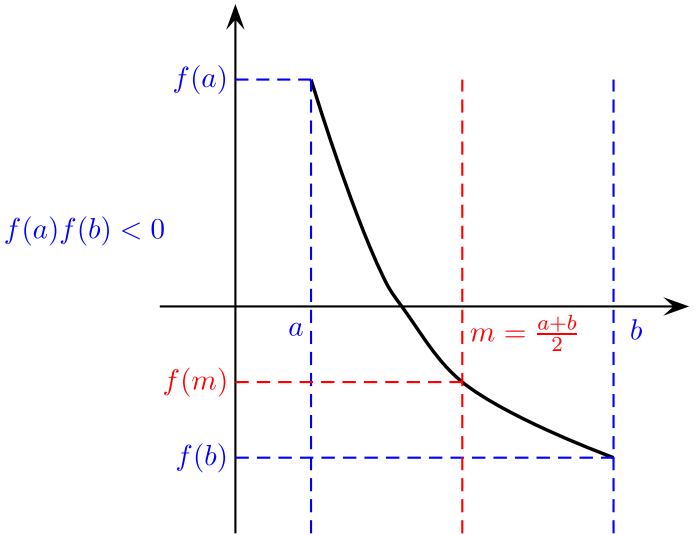
$$e^x = x + 2$$

On pourra initialiser les calculs avec les différentes valeurs $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = -10$ et $x_0 = 2$.

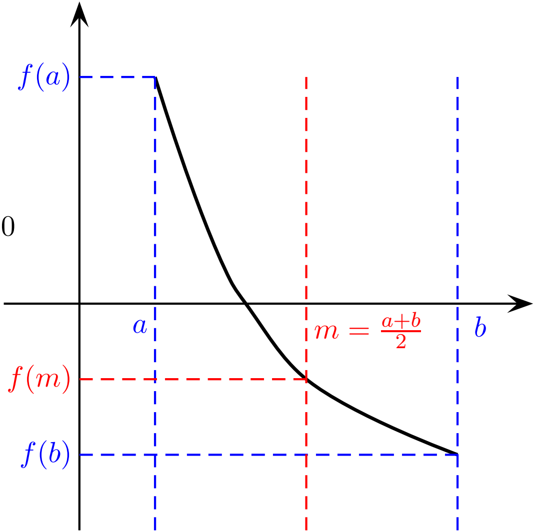
La méthode de recherche d'une solution par dichotomie est une approche "naïve" de résolution de l'équation $f(x) = 0$:

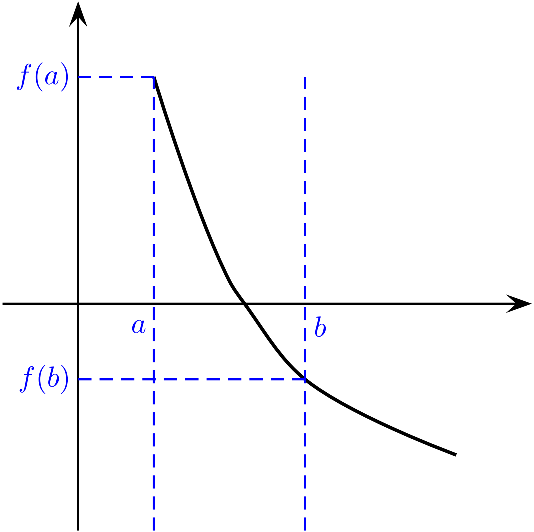
- on part d'un encadrement $a < x_0 < b$
- sans information supplémentaire, on coupe en deux et on cherche $f(m)$ pour $m = \dfrac{a+b}{2}$
- si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires, alors on a $a < x_0 < m$, et on reprend l'étape précédente avec $b = m$,
  sinon, $m < x_0 < b$ et on reprend l'étape précédente avec $a = m$.


$f(a)$
$f(a)f(b) < 0$
a
b
$f(b)$

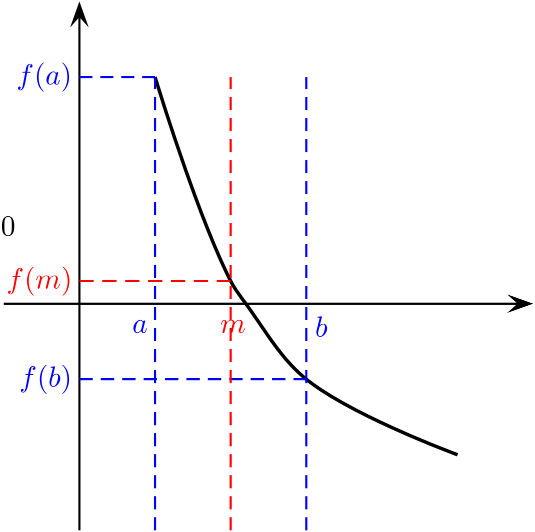

$f(a)$
$f(a)f(b) < 0$
a
$m = \frac{a+b}{2}$
b
$f(m)$
$f(b)$

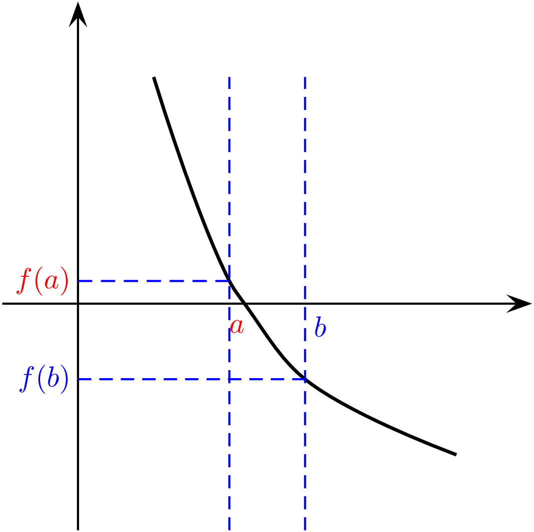
$f(a)f(m) < 0$



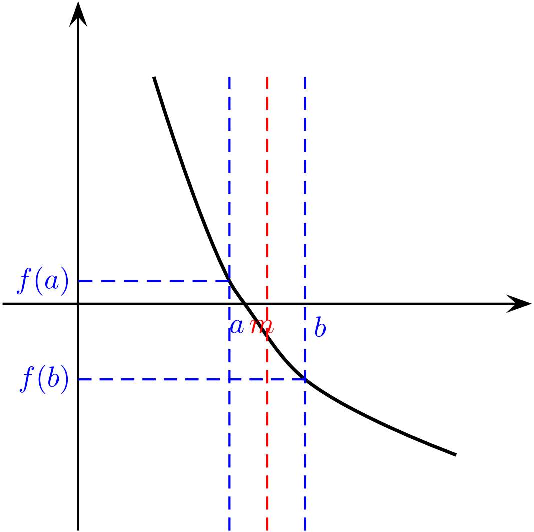

$f(a)$
a
b
$f(b)$

$f(a)f(m) > 0$





$f(a)$
$f(b)$
a
b


$f(a)$
$f(b)$
a
m
b

Algorithme

Initialisation : a, b, N
Pour i de 0 à N
    $m = \dfrac{a+b}{2}$
    Si $f(a)f(m) < 0$
        $b = m$
    Sinon
        $a = m$
    Fin Si
Fin Tant que
Afficher a, b

Algorithme

Choix de N ? Précision ?

Initialisation : a, b, ε

$e = b - a$

Tant que $e > \varepsilon$

$m = \dfrac{a+b}{2}$

Si $f(a)f(m) < 0$

$b = m$

Sinon

$a = m$

Fin Si

$e = b - a$

Fin Tant que

Afficher a, b

Exercice 3 : Calculer par dichotomie un encadrement de la solution de l'équation

$$(E) : \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

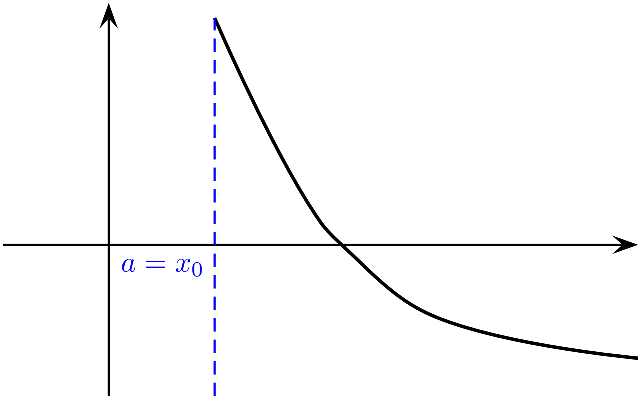
en effecuant 4 itérations à partir de l'intervalle $[2; 4]$

Donner une valeur approchée de la solution.

Quelle est sa précision ?

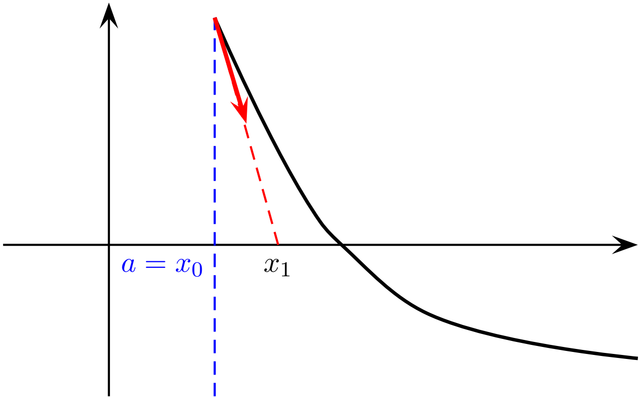
La dichotomie est une méthode naïve dans la mesure où elle n'utilise aucune information sur la fonction : on choisit simplement à chaque nouvelle itération de couper en deux l'intervalle.

La méthode de Newton repose sur l'idée de chercher la solution de l'équation $f(x) = 0$ en descendant suivant la pente, ou tangente, de la courbe,



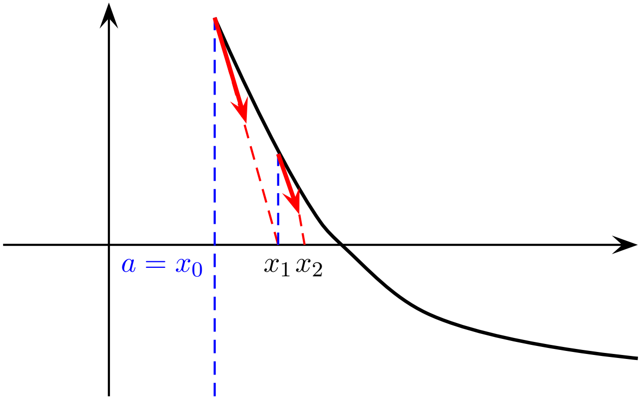
La dichotomie est une méthode naïve dans la mesure où elle n'utilise aucune information sur la fonction : on choisit simplement à chaque nouvelle itération de couper en deux l'intervalle.

La méthode de Newton repose sur l'idée de chercher la solution de l'équation $f(x) = 0$ en descendant suivant la pente, ou tangente, de la courbe,



La dichotomie est une méthode naïve dans la mesure où elle n'utilise aucune information sur la fonction : on choisit simplement à chaque nouvelle itération de couper en deux l'intervalle.

La méthode de Newton repose sur l'idée de chercher la solution de l'équation $f(x) = 0$ en descendant suivant la pente, ou tangente, de la courbe,



On approxime donc localement la courbe par sa tangente :

$$f(x) \simeq f(a) + (x-a)f'(a)$$

et, au lieu de considérer la nouvelle valeur $m = \dfrac{a+b}{2}$, on utilise l'approximation

$$f(x) \simeq f(a) + (x-a)f'(a) = 0$$

soit

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

On construit ainsi par récurrence la suite de valeurs

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = a \\[2ex] x_{n+1} = x_n - \dfrac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)} \end{array}\right.$$

Remarques :

- la fonction f doit être dérivable
- la dérivée de f doit être connue analytiquement
- problème : mauvais conditionnement, lorsque $f'(x)$ proche de 0
- méthode performante (cf. TP)

Exercice 4 : Calculer les valeurs obtenues avec 4 intérations de la méthode de Newton pour l'équation

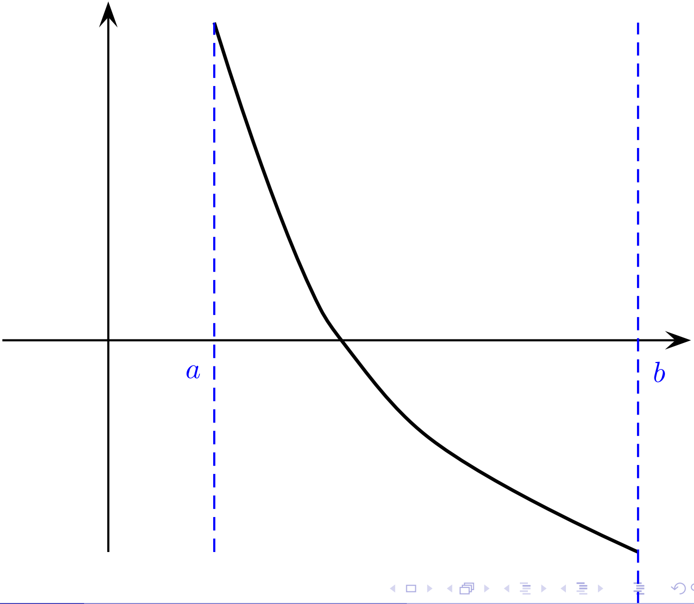
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

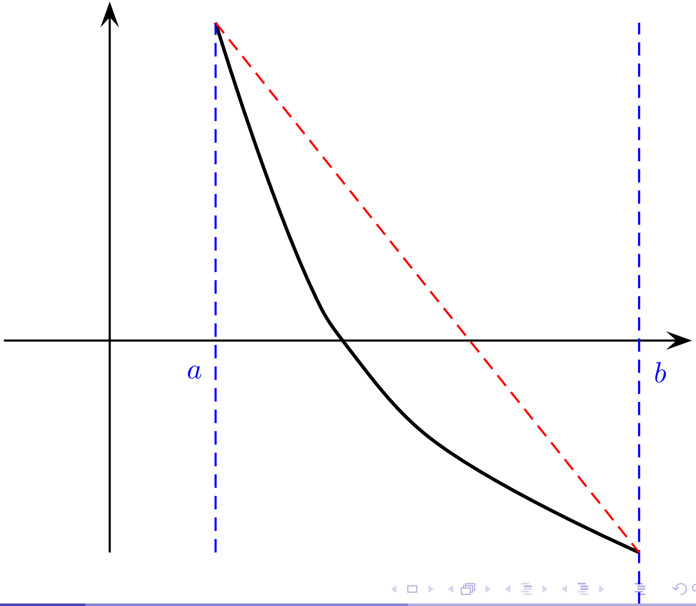
en partant de $x_0 = 2$

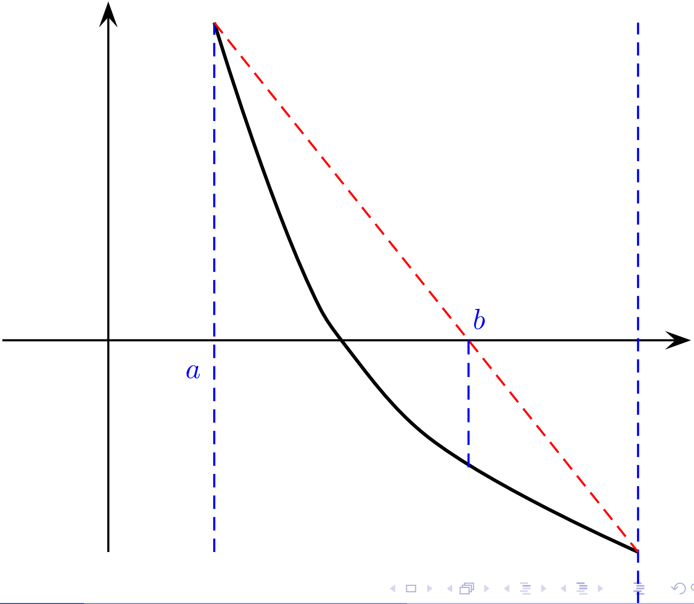
La méthode de la sécante est une alternative efficace à la méthode de Newton lorsque

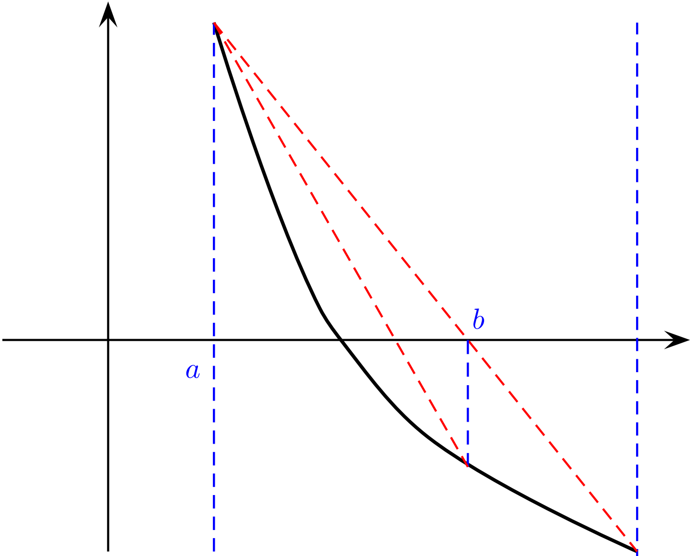
- la fonction f n'est pas dérivable (ou on ne sait pas si...)
- on ne connaît pas d'expression explicite de $f'(x)$
- l'évaluation de $f'(x)$ est trop coûteuse

On remplace la tangente de la méthode de Newton par la sécante à la courbe :

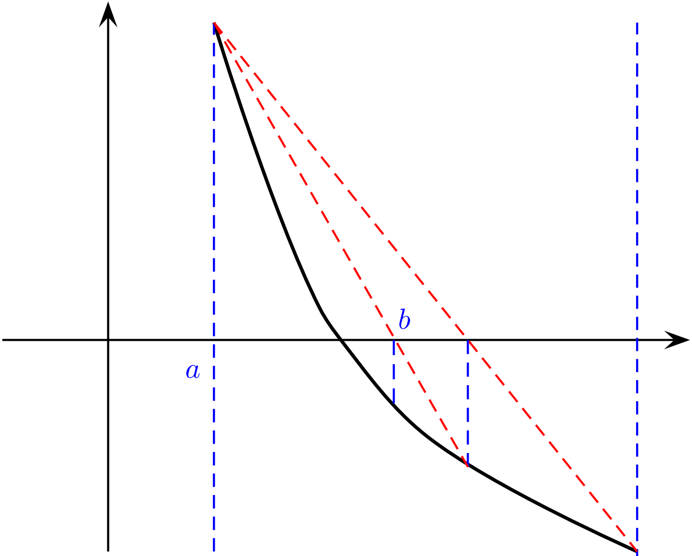

a
b

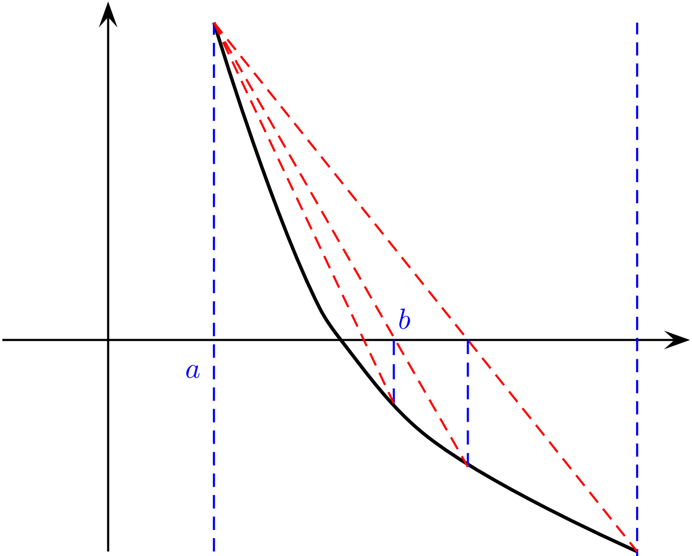

a
b


b
a



a
b


b
a


b
a

À partir de l'approximation par la tangente :

$$f(x) \simeq f(a) + (x-a)f'(a)$$

et en approximant la dérivée par le taux d'accrosissement de la fonction entre a et b (le coefficient directeur de la sécante)

$$f'(a) \simeq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

on obtient, à l'intersection avec l'axe des abscisses

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \simeq a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

On définit ainsi la suite de valeurs par récurrence :

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n - f\left(x_n\right)\dfrac{x_n - a}{f\left(x_n\right) - f(a)} \end{cases}$$

Exercice 5 : Calculer les valeurs obtenues avec 4 itérations de la méthode de la sécante utilisée pour résoudre l'équation

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

en partant de l'interavelle $a = 2$ et $b = 4$,
c'est-à-dire en prenant $a = 2$ et la valeur initiale $x_0 = 4$.