Résolution approchée d'équations différentielles
IUT SGM

Y. Morel

https://xymaths.fr/

1. Principe général
   - Problème de Cauchy
   - Maillage et résolution approchée
   - Approximation de la dérivée
   - Méthode d'Euler
   - Intégration d'une équation différentielle
   - Méthode de Runge-Kutta
     - RK2
     - RK4
2. Equations différentielles d'ordre 2

On appelle **problème de Cauchy** une équation différentielle associée à une condition initiale, par exemple,

$$\left\{\begin{array}{l} y' = 3y - 2 \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} xy' - y = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$$

On appelle **problème de Cauchy** une équation différentielle associée à une condition initiale, par exemple,

$$\begin{cases} y' = 3y - 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy' - y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Formellement, un problème de Cauchy s'écrit

$$\begin{cases} y' = \varphi\,(x, y) \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

On appelle **problème de Cauchy** une équation différentielle associée à une condition initiale, par exemple,

$$\left\{\begin{array}{l} y' = 3y - 2 \\ y(0) = 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \text{avec } \varphi(x,y) = 3y(x) - 2 \\ \text{et } y_0 = 0 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \text{avec } \varphi(x,y) = \big(y(x)\big)^2 \\ \text{et } y_0 = 1 \end{array}$$

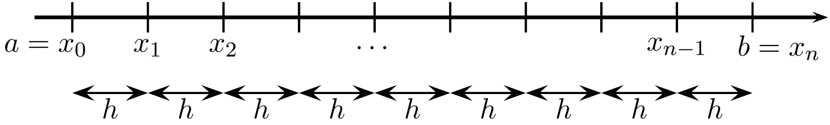
$$\left\{\begin{array}{l} xy' - y = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \text{avec } \varphi(x,y) = \dfrac{y(x)}{x} \\ \text{et } y_0 = 1 \end{array}$$

Formellement, un problème de Cauchy s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} y' = \varphi\,(x,y) \\ \\ y(0) = y_0 \end{array}\right.$$

Maillage du domaine

On discrétise cet intervalle $[a;b]$ avec $n+1$ points et un pas h :



Résoudre l'équation $y' = \varphi(x,y)$ signifie déterminer la fonction y, ou encore les valeurs $y(x)$ pour tout $x \in [a;b]$.

La résolution approchée consiste à trouver une valeur approchée $y_i = y\left(x_i\right)$ **aux noeuds du maillage**.
Par exemple, pour $h = 0,1$, on cherchera

$$\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) = y(0) \\ y_1 &= y(x_1) = y(0,1) \\ y_2 &= y(x_2) = y(0,2) \\ &\dots \end{aligned}$$

1. Principe général
   - Problème de Cauchy
   - Maillage et résolution approchée
   - Approximation de la dérivée
   - Méthode d'Euler
   - Intégration d'une équation différentielle
   - Méthode de Runge-Kutta
     - RK2
     - RK4

2. Equations différentielles d'ordre 2

On cherche donc les approximations $y_i = y\left(x_i\right)$ aux noeuds.
En ces noeuds, l'équation s'écrit

$$y' = \varphi(x, y) \Longrightarrow y_i' = \varphi\left(x_i, y_i\right))$$

Il reste à approximer y_i', cf. "approximation numérique de dérivées" , par exemple, avec un schéma décentré à droite :

$$\begin{aligned} y_i' = y'\left(x_i\right) \quad &\simeq \frac{y\left(x_i + h\right) - y\left(x_i\right)}{h} \\ &= \frac{y_{i+1} \quad - \quad y_i}{h} \end{aligned}$$

1. Principe général
   - Problème de Cauchy
   - Maillage et résolution approchée
   - Approximation de la dérivée
   - Méthode d'Euler
   - Intégration d'une équation différentielle
   - Méthode de Runge-Kutta
     - RK2
     - RK4

2. Equations différentielles d'ordre 2

On obtient la méthode d'Euler :

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \simeq y_i' = \varphi\left(x_i, y_i\right) \Longrightarrow \boxed{y_{i+1} = y_i + h\varphi\left(x_i, y_i\right)}$$

Exercice 1 :

On considère l'équation $y' + y^2 = 0$, avec $y(0) = 1$.

1. Résoudre cette équation (exactement) puis donner la valeur de $y(1)$.
2. Écrire cette équation sous la forme d'un problème de Cauchy $y' = \varphi(x, y)$ puis, en utilisant la méthode d'Euler, calculer une valeur approchée de $y(1)$ avec un pas $h = 0, 2$

Une autre manière d'aborder le problème consiste à intégrer l'équation, après maillage :

$$\begin{aligned} y' = \varphi(x,y) \quad &\Longrightarrow \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x,y) \\ &\Longrightarrow y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x,y) \end{aligned}$$

En utilisant la méthode des rectangles, à gauche, on retrouve la méthode d'Euler,

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi\left(x_i, y_i\right)$$

On peut utiliser alors toute autre méthode d'intégration numérique.
Avec la méthode des trapèzes, on obtient la méthode d'Euler modifiée (améliorée)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big(\varphi(x_i, y_i) + \varphi(x_{i+1}, y_{i+1})\Big)$$

Les méthodes de Runge et Kutta repose sur la formule de Taylor. L'idée est la même que celle vue dans l'approximation numérique de dérivées : obtenir une plus grande précision en combinant et annulant certains termes du développement.

Les méthodes de Runge-Kutta sont couramment utilisées, particulièrement Runge-Kutta d'ordre 2 (**RK2**) et Runge-Kutta d'ordre 4 (**RK4**)

RK2 peut être vue comme une version d'Euler améliorée, car prenant en compte un demi-pas intermédiaire :

La relation de récurrence s'écrit

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

avec

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2}\varphi\left(x_i, y_i\right)$$

1. Principe général
   - Problème de Cauchy
   - Maillage et résolution approchée
   - Approximation de la dérivée
   - Méthode d'Euler
   - Intégration d'une équation différentielle
   - Méthode de Runge-Kutta
     - RK2
     - RK4

2. Equations différentielles d'ordre 2

RK4 est une des méthodes le plus couramment utilisée, car très précise et efficace.

$$y_{i+1} = y_i + h\Big(Ak_0 + Bk_1 + Ck_2 + Dk_3\Big)$$

avec

$$\begin{cases} k_0 = \varphi\left(x_i; y_i\right) \\ k_1 = \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_0\right) \\ k_2 = \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = \varphi\left(x_i + h; y_i + hk_2\right) \end{cases}$$

cf. TP ...

On peut approximer une solution d'équation différentielle de tout ordre comme précédemment, à l'aide d'un maillage, puis en approximant les dérivées.

Exercice 2 :

On considère l'équation différentielle $y" - 4y = 0$ sur $[0;3]$, avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.

1. On se donne un maillage régulier de $[0;3]$ avec un pas h : $x_i = ih$ et on note $y_i = y(x_i)$.

   Donner une approximation de la dérivée seconde $y"(x_i)$.
2. En déduire un schéma numérique d'approximation de l'équation différentielle $y" - 4y = 0$.
   On exprimera y_{i+1} en fonction de y_i et y_{i-1}.
3. Préciser les conditions initiales y_0 et y_1 à l'aide des conditions initiales de l'équation.