Introduction à la méthode des éléments finis

IUT SGM

Y. Morel

2020/2021

https://xymaths.fr/

1. Position du problème
   - Formulation intégrale ou variationnelle
   - Méthode de Galerkin et élements finis

2. Problème 2D, 3D
   - Maillage et éléments finis en 2D
   - Exemple d'élément fini en 2D
   - Éléments finis volumiques
   - Exemple de résultat

3. Problème d'évolution

Un exemple : l'équation de Poisson en 1D

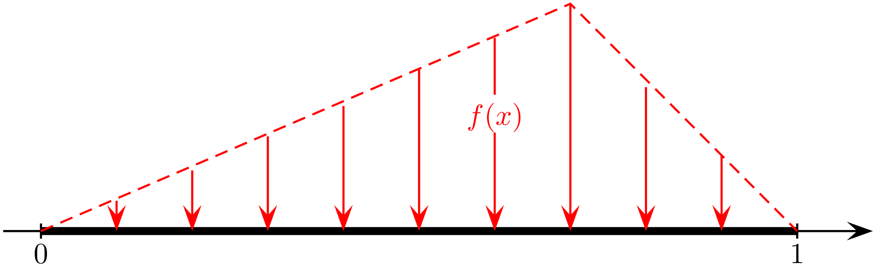
(problème de membrane / déformation élastique)

$$\begin{cases} -u" = f \text{ sur } [0;1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Un exemple : l'équation de Poisson en 1D

(problème de membrane / déformation élastique)

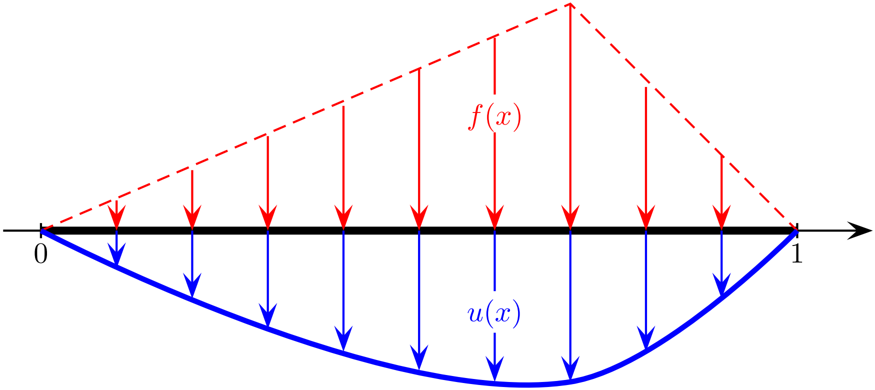
$$\begin{cases} -u" = f \text{ sur } [0;1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$



Un exemple : l'équation de Poisson en 1D

(problème de membrane / déformation élastique)

$$\begin{cases} -u" = f \text{ sur } [0;1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$



Soit v une fonction quelconque, dérivable et telle que $v(0) = v(1) = 0$, alors en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} -u" = f \quad &\Longrightarrow - \int_0^1 u"v = \int_0^1 fv \\ &\Longleftrightarrow \; - \underbrace{\Big[u'v\Big]_0^1}_{=0} + \int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv \end{aligned}$$

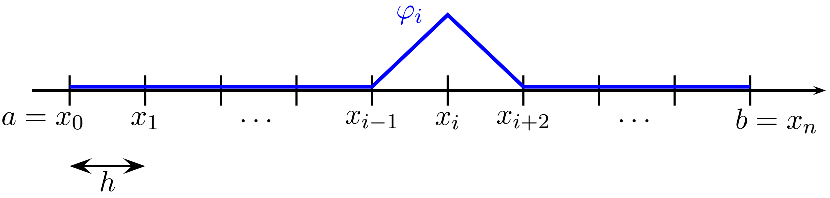
On obtient donc la formulation intégrale (ou formulation variationnelle, ou encore formulation faible) :

$$\int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{a(u,v)} \; = \; \mathrm{l(v)}}$$

La méthode de Galerkin propose de chercher une approximation de u dans un espace de fonction de dimension finie.

Avec un maillage de $[0;1]$, on définit des fonctions de base d'éléments finis, par exemple :



et on cherche alors une approximation de u :

$$u \simeq \widetilde{u} = \sum_i \alpha_i \varphi_i$$

où les inconnues sont les coefficients α_1, α_2 ...

Le problème était :

$$\text{trouver } u \text{ tel que, pour tout } v,\ a(u,v) = l(v)$$

Comme a et l sont linéaires, le problème devient

$$\text{trouver } \widetilde{u} \text{ tel que, pour tout } j,\ a\left(\widetilde{u},\varphi_j\right) = l\left(\varphi_j\right)$$

Maintenant, avec $\widetilde{u} = \sum_j \alpha_j \varphi_j$, on a $a\left(\sum_i \alpha_i \varphi_i, \varphi_j\right) = \sum_i \alpha_i a\left(\varphi_i,\varphi_j\right)$

et donc le problème s'écrit

$$AU = B$$

Avec la "matrice de rigidité" $A = \Big(a\left(\varphi_j,\varphi_i\right)\Big)_{i,j}$,

l'inconnue $U = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \end{pmatrix}$ et le second membre $B = \begin{pmatrix} l\left(\varphi_1\right) \\ l\left(\varphi_2\right) \\ \dots \end{pmatrix}$

Les coefficients $a\left(\varphi_j,\varphi_i\right)=\int\varphi_i'\varphi_j'$ et $l\left(\varphi_i\right)=\int f\varphi_i$ se calculent avec une méthode d'intégration numérique.

La résolution de ce système donne les coefficients α_j recherchés, et donc l'approximation

$$u\simeq\widetilde{u}=\sum_i\alpha_i\varphi_i$$

soit donc, pour tout $x\in[0;1]$,

$$u(x)\simeq\widetilde{u}(x)=\sum_i\alpha_i\varphi_i(x)$$

En 2D, ou 3D, l'équation de Poisson s'écrit

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

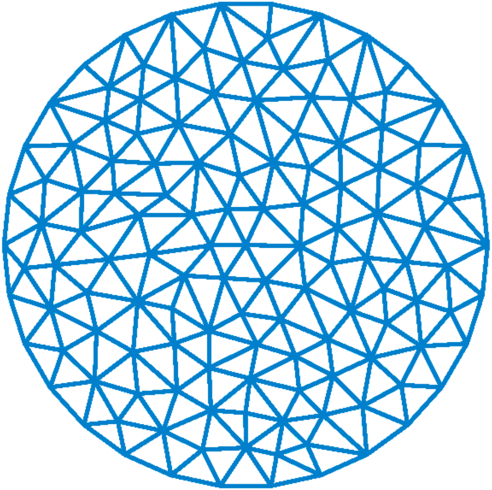
On procède de même : pour tout fonction v, on a multiplie par v, et on intègre (en 2D ou 3D),

$$-\int_\Omega \Delta u \, v = \int_\Omega f v$$

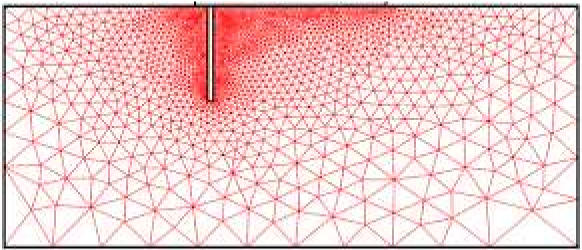
Ensuite, il existe des analogues multidimensionnels de l'intégration par parties : formule de Green, d'Ostrogadski, de la divergence, ...qui permettent d'écrire de nouveau le problème sous la forme intégrale

$$a(u, v) = l(v)$$

Maillage triangulaire (triangularisation) d'un disque

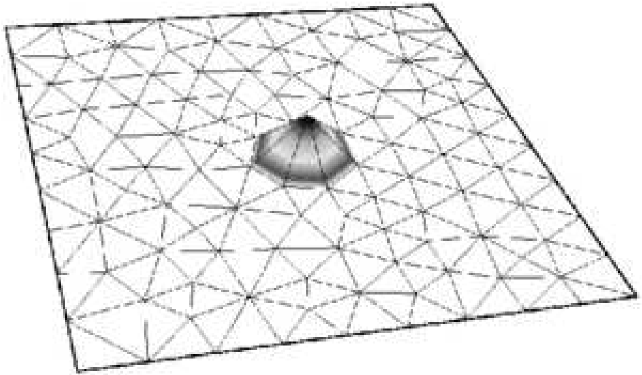


Maillage d'une pièce avec une fente

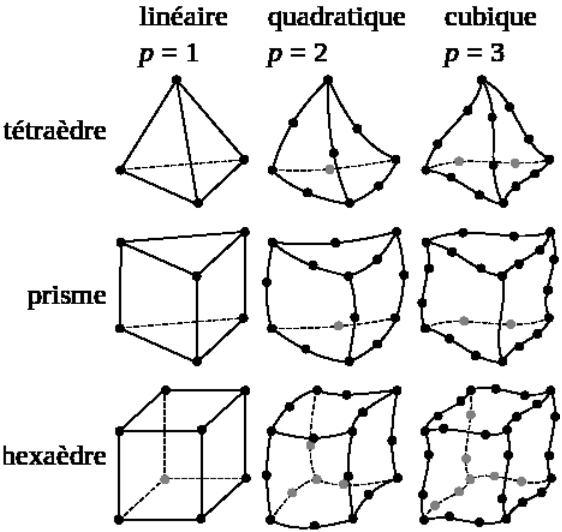


Éléments finis P_1 en 2D

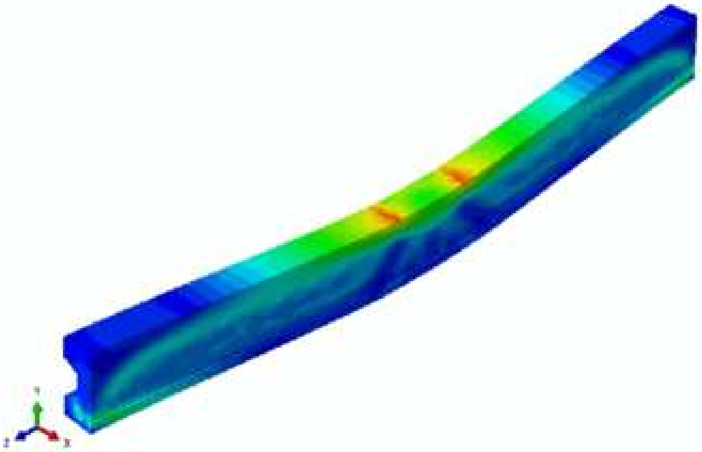
Ce sont des fonctions linéaires par morceaux, analogues de celles rencontrées précédemment en 1D.



Principaux maillages et éléments finis volumiques



Déformation d'une poutre



Pour des problèmes d'évolution, par exemple, l'équation de la chaleur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = f \text{ dans } \Omega \\ T = g \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

où on cherche la valeur de la température $T(t, x, y, z)$ à l'instant t et au point $M(x; y; z)$ de l'espace.

On cherche comme précédemment une approximation à l'aide de fonctions de base dans un espace de dimension finie :

$$T(t, M) = \sum_i u_i(t)\varphi_i(M)$$

et en intégrant l'équation $\displaystyle\int \Omega \frac{\partial T}{\partial t}\varphi_j - \int_\Omega \Delta T \varphi_j = \int_\Omega f\varphi_j.$

et on obtient finalement une équation différentielle matricielle de la forme

$$KU' + MU = B$$

qu'on résout à l'aide d'une méthode numérique adaptée
(différences finies, Eleur, RK, ...)