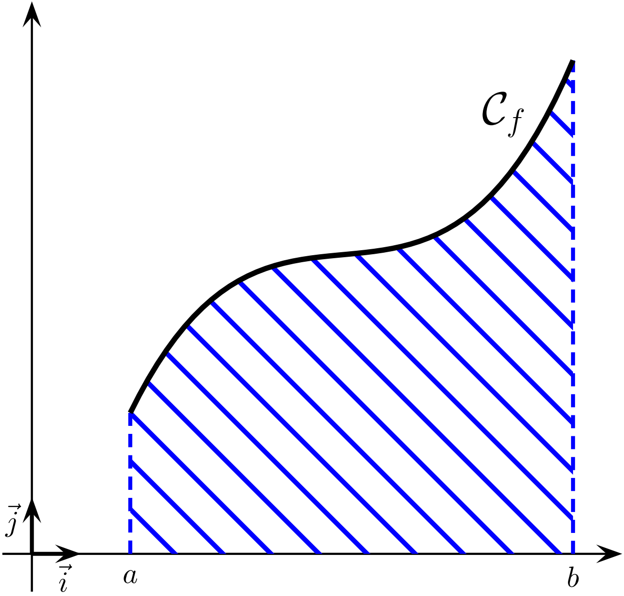
Intégration numérique
IUT SGM

Y. Morel

2020/2021

https://xymaths.fr/



$$\int_a^b f(x)dx = ?$$

1. Principe général
   - Rectangle à gauche
   - Rectangle à droite
   - Rectangle au mileu
   - Méthode des trapèzes
   - Méthode de Simpson
2. Cas général, sur un intervalle quelconque $[a; b]$
   - Discrétisation (maillage)
   - Méthodes des rectangles
   - Méthode des trapèzes
   - Méthode de Simpson
3. Plus généralement
   - Approximation et interpolation
   - Méthode de Gauss

1. Principe général
   - Rectangle à gauche
   - Rectangle à droite
   - Rectangle au mileu
   - Méthode des trapèzes
   - Méthode de Simpson

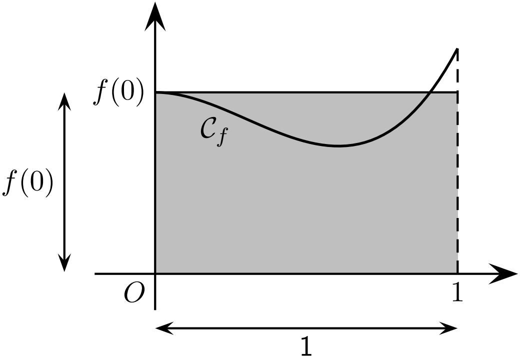
2. Cas général, sur un intervalle quelconque $[a; b]$
   - Discrétisation (maillage)
   - Méthodes des rectangles
   - Méthode des trapèzes
   - Méthode de Simpson

3. Plus généralement
   - Approximation et interpolation
   - Méthode de Gauss

Pour simplifier, on commence par l'intervalle $[0;1]$.

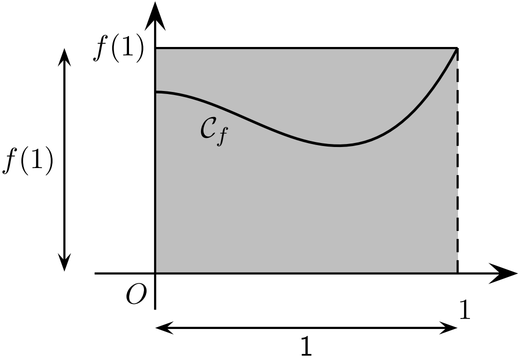
L'approximation par un rectangle "à gauche" donne :

$$\int_0^1 f \simeq f(0)$$



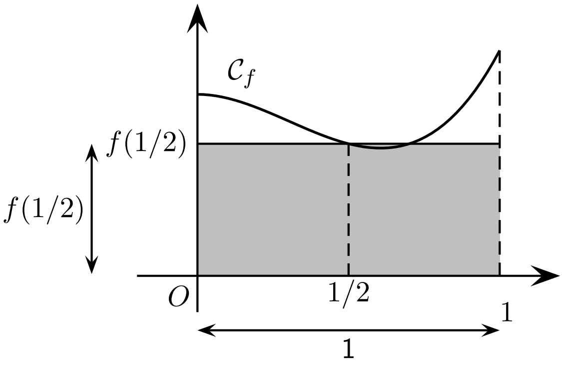
De même, avec un rectangle "à droite" on a :

$$\int_0^1 f \simeq f(1)$$



Et bien sûr alors, pourquoi pas l'approximation au "point milieu" :

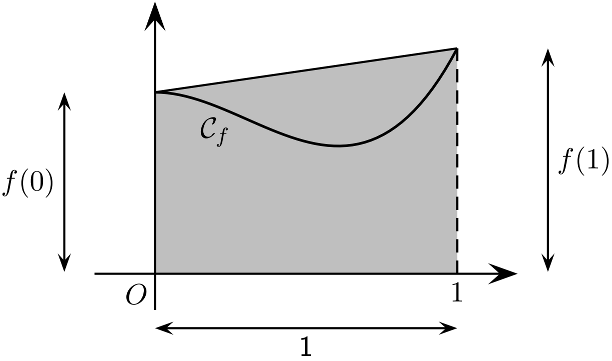
$$\int_0^1 f \simeq f(1/2)$$



1. Principe général
   - Rectangle à gauche
   - Rectangle à droite
   - Rectangle au mileu
   - Méthode des trapèzes
   - Méthode de Simpson
2. Cas général, sur un intervalle quelconque $[a;b]$
   - Discrétisation (maillage)
   - Méthodes des rectangles
   - Méthode des trapèzes
   - Méthode de Simpson
3. Plus généralement
   - Approximation et interpolation
   - Méthode de Gauss

Plus précisément, méthode "à droite et à gauche" : méthode des trapèzes :

$$\int_0^1 g \simeq \frac{(b+B)\times h}{2} = \frac{1}{2}\Big(f(0)+f(1)\Big)$$



Les méthodes précédentes approximent en fait f par

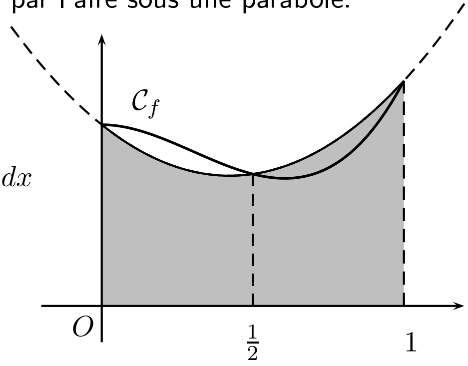
- une fonction constante : rectangles à gauche ou à droite
- une fonction affine : trapèzes

La méthode de Simpson utilise une "meilleure" approximation de f.

On interpole la fonction f par un polynôme P du second degré aux trois points $(0; f(0))$, $(1/2; f(1/2))$, et $(1; f(1))$.

On approxime alors l'intégrale de f par l'aire sous une parabole.

$$\begin{aligned}\int_0^1 g &\simeq \int_0^1 P \\ &= \int_0^1 \left(ax^2+bx+c\right)\,dx \\ &= \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c \\ &= \frac{1}{6}\left[2a+3b+6c\right]\end{aligned}$$



Il reste à déterminer les coefficients a, b et c du trinôme du second degré. On écrit pour cela les relations d'interpolations aux trois points :

$$\left\{\begin{array}{l} P(0) = c = f(0) \\ P(\frac{1}{2}) = \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{2} + c = f\left(\frac{1}{2}\right) \\ P(1) = a + b + c = f(1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} c = f(0) \\ a + 2b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - 4f(0) \\ a + b = f(1) - f(0) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} c = f(0) \\ b = -3f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) \\ a = 2f(1) + 2f(0) - 4f\left(\frac{1}{2}\right) \end{array}\right.$$

En remplaçant ces valeurs dans l'expression de l'intégrale, on obtient :

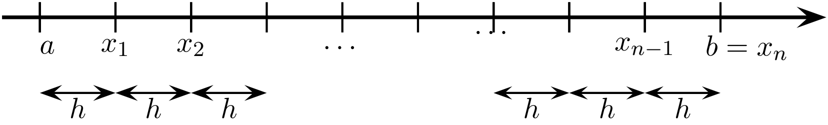
$$\int_0^1 f \simeq \frac{1}{6}\left[2a + 3b + c\right] = \frac{1}{6}\left[f(1) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0)\right]$$

Sur un intervalle quelconque (mais borné) $[a;b]$, on peut utiliser grossièrement les approximations suivantes :

- rectangle à gauche : $\displaystyle\int_a^b f \simeq (b-a)f(a)$
- rectangle à droite : $\displaystyle\int_a^b f \simeq (b-a)f(b)$
- trapèze : $\displaystyle\int_a^b f \simeq \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$
- ...

Bien sûr, l'approximation est d'autant meilleure que $[a;b]$ est petit.

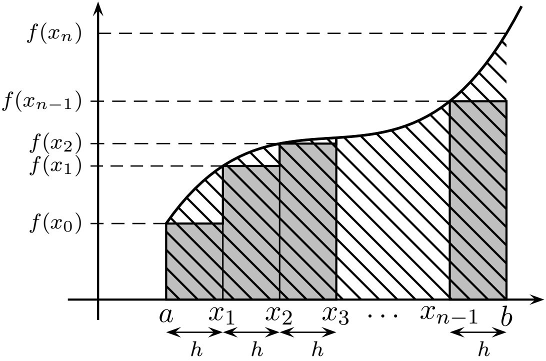
On discrétise donc cet intervalle $[a;b]$ avec $n+1$ points et un pas h :



et on utilise alors la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \int_{x_0}^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\end{aligned}$$

Chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ est alors plus petit, et on peut y utiliser une des approximations précédentes : rectangle, trapèze, ...



Méthode des rectangles : $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

à gauche :

$$I \simeq h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right)$$

à droite :

$$I \simeq h \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)$$

milieu :

$$I \simeq h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

Exercice 1 : Soit $I = \int_0^2 e^{-x}\,dx$

1. Calculer la valeur exacte de I, puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
2. Déterminer une valeur approchée de I à l'aide de la méthode des rectangles à gauche et un pas $h = 0,5$.
3. Reprendre la question précédente avec un pas $h = 0,25$.
4. Commenter ces résultats.

En discrétisant l'intervalle en $n+1$ points avec un pas constant h, on obtient de même pour la méthode des trapèzes :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\simeq \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\Big(f\left(x_i\right)+f\left(x_{i+1}\right)\Big) \\
&\simeq \frac{h}{2}\left(f\left(x_0\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}f\left(x_i\right)+f\left(x_n\right)\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2 : On reprend l'intégrale $I = \int_0^2 e^{-x}\,dx$

1. Déterminer une valeur approchée de I à l'aide de la méthode des trapèzes et un pas $h = 0,5$ puis un pas $h = 0,25$
2. Commenter ces résultats.

En discrétisant l'intervalle en $n+1$ points avec un pas constant h, on obtient pour la méthode de Simpson :
On avait, sur $[0;1]$:

$$\int_0^1 f = \frac{1}{6}\left[f(1) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0)\right]$$

donc sur un intervalle $[x_i; x_{i+1}]$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f = \frac{1}{6}\left[f\left(x_i\right) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f\left(x_{i+1}\right)\right]$$

et donc, en sommant :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_i\right) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f\left(x_{i+1}\right)\right]$$

Exercice 2 : On reprend l'intégrale $I = \int_0^2 e^{-x}\,dx$

1. Déterminer une valeur approchée de I à l'aide de la méthode de Simpson et un pas $h = 0,5$.
2. Commenter.

1. Principe général
   - Rectangle à gauche
   - Rectangle à droite
   - Rectangle au mileu
   - Méthode des trapèzes
   - Méthode de Simpson

2. Cas général, sur un intervalle quelconque $[a;b]$
   - Discrétisation (maillage)
   - Méthodes des rectangles
   - Méthode des trapèzes
   - Méthode de Simpson

3. Plus généralement
   - Approximation et interpolation
   - Méthode de Gauss

Toutes les méthodes précédentes consistent à interpoler la fonction par un polynôme, puis à remplacer le calcul de l'intégrale par l'intégrale de ce polynôme.

- degré 0 (constante) pour les méthodes des rectangles qui interpolent la fonction en un seul point
- degré 1 pour la méthode des trapèzes utilise donc une interpolation affinede la fonction aux deux extrémités de l'intervalle
- degré 2 pour la méthode de Simpson

On peut construire ainsi des méthodes d'intégration numérique d'ordre quelconque, en augmentant le degré du polynôme d'interpolation. Il s'agit plus généralement des méthodes de Newton-Cotes.

$\hookrightarrow$ cf. cours sur l'interpolation ...

Les méthodes numériques précédentes utilisent toutes une discrétisation régulière de l'intervalle d'intégration, en attribuant éventuellement des "poids" aux valeurs de certains points :
pour les trapèzes :

$$\int_a^b f \simeq \frac{h}{2}\left(1 f\left(x_0\right)+2 \sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i\right)+1 f\left(x_n\right)\right)$$

pour Simpson :

$$\int_a^b f(x) dx=\frac{h}{6} \sum_{i=0}^{n-1}\left[1 f\left(x_i\right)+4 f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+1 f\left(x_{i+1}\right)\right]$$

On peut penser aussi, au lieu de découper cet intervalle régulièrement, à choisir des points de manière plus adaptée.
C'est ce à quoi aboutissent les méthodes de Gauss pour l'intégration numérique ...