MODÉLISATION ET SIMULATION

Jeudi 13 janvier 2022 - 1h30

Sans documents (Formulaire en fin d'énoncé) - Calculatrice autorisée

Exercice 1 Quelle est la valeur de la variable `s`, affichée en fin du programme Scilab ci-contre ?

```
u=1
s=0
n=4
for i=1:n
   u=3*u-1
   s=s+u
end
disp(s)
```

Exercice 2 Résolution approchée d'une équation de degré 3

On cherche à résoudre l'équation $(E) : 2x^3 + 5x - 2 = 0$

1. En étudiant les variations de la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 + 5x - 2$ montrer que l'équation (E) admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$.
2. En utilisant la méthode par dichotomie calculer une valeur approchée de la solution α.

   On effectuera quatre itérations de la méthode, et on précisera à chacune d'entre elle l'encadrement obtenu.
3. En utilisant la méthode de Newton, en partant de la valeur initiale $x_0 = 0$, calculer une valeur approchée de α.

   On effectuera quatre itérations de la méthode, en précisant à chacune d'entre elle les valeurs approchées obtenues (arrondies à 10^{-4} près).

Exercice 3. Calcul approché d'une intégrale

On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 e^{0,5x} dx$.

1. Calculer la valeur exacte de I. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} près de cette valeur.
2. Calculer une valeur approchée de I en utilisant la méthode des rectangles à gauche avec un pas $h = 0,5$.

   Donner une valeur arrondie à 10^{-3} près de cette valeur, et préciser l'erreur relative.
3. Comment améliorer l'estimation numérique de l'intégrale ? Donner deux méthodes.

Exercice 4. Approximation d'une dérivée

On cherche à approximer la dérivée en $x = 1$ de la fonction f définie par $f(x) = x^4 + 5$.

1. Donner la valeur exacte de $f'(1)$.
2. Calculer une valeur approchée de $f'(1)$ avec un schéma décentré à droite en utilisant un pas $h = 0,01$, puis avec un schéma centré et le même pas.
   Comparer la précision de ces résultats.

Exercice 5. Résolution approchée d'une équation différentielle

On se propose de résoudre l'équation différentielle $y'(x)+3y^2(x) = 0$, avec la condition initiale $y(0) = 1$.

1. Résoudre cette équation et donner la valeur exacte $y(1)$ de cette solution en $x = 1$.
2. En utilisant le schéma d'Euler, calculer numériquement $y(1)$ avec un pas $h = 0,2$.
3. Quelle est l'erreur relative obtenue pour la valeur approchée de $y(1)$?
4. Citer deux méthodes qui permettent de résoudre numériquement cette équation avec une meilleure précision.

FORMULAIRE

Algorithme de Newton
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Méthode des rectangles à gauche sur l'intervalle $[a, b]$.
Avec $n + 1$ points de maillage $x_0 = a$, x_1, x_2, $\dots$, $x_n = b$ avec un pas régulier h,

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Schéma décentré à droite, avec un pas h : $\quad f'(a) \simeq \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Schéma centré, avec un pas h : $\quad f'(a) \simeq \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$

Méthode d'Euler. On considère l'équation différentielle du premier ordre : $y'(x) = \varphi(x, y(x))$.

Le schéma d'Euler s'écrit
$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i)$$