

MODÉLISATION ET SIMULATION

Jeudi 13 janvier 2022 - 1h30

Corrigé

Exercice 1. Le programme affiche 62 :

Pour $i=1$: $u=3*1-1=2$; $s=0+2=2$

Pour $i=2$: $u=3*2-1=5$; $s=2+5=7$

Pour $i=3$: $u=3*5-1=14$; $s=7+14=21$

Pour $i=4$: $u=3*14-1=41$; $s=21+41=62$

Exercice 2.

1. $f'(x) = 6x^2 + 5$, or $x^2 \geq 0$ et donc $f'(x) \geq 5 > 0$ et f est croissante sur \mathbb{R} .

De plus $f(0) = -2 < 0$ et $f(1) = 5 > 0$ et donc, comme f est continue sur \mathbb{R} , l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution sur $[0; 1]$.

2. • $m = (0 + 1)/2 = 0,5$ et $f(0,5) = 0,75 > 0$ donc $\alpha \in]0; 0,5[$.

• $m = (0 + 0,5)/2 = 0,25$ et $f(0,25) \simeq -0,7 < 0$ donc $\alpha \in]0,25; 0,5[$

• $m = (0,25 + 0,5)/2 = 0,375$ et $f(0,375) \simeq -0,02 < 0$ donc $\alpha \in]0,375; 0,5[$

• $m = (0,375 + 0,5)/2 = 0,4375$ et $f(0,4375) \simeq 0,3 > 0$ donc $\alpha \in]0,375; 0,4375[$

3. On part de $x_0 = 0$, et on trouve :

• $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,4$

• $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \simeq 0,3785$

• $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \simeq 0,3783$

• $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \simeq 0,3783$

Exercice 3.

1.

$$I = \int_0^2 e^{0,5x} dx = \left[\frac{1}{0,5} e^{0,5x} \right]_0^2 = 2e^1 - 2 \simeq 3,437$$

2. Avec $h = 0,5$, on a le maillage $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1,5$ et $x_4 = 2$ et

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 f(x) dx \simeq h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = 0,5 (f(0) + f(0,5) + f(1) + f(1,5)) \\ &= 3,025 \end{aligned}$$

L'erreur relative est

$$\epsilon_r = \left| \frac{3,437 - 3,025}{3,437} \right| \simeq 0,12 = 12\%$$

3. L'estimation numérique peut être améliorée soit en utilisant un maillage plus fin, une valeur plus petite pour le pas h , ou en utilisant une autre méthode numérique, par exemple la méthode des trapèzes ou de Simpson.

Exercice 4.

1. $f'(x) = 4x^3$ et $f'(1) = 4$.

2. Schéma décentré à droite, avec un pas $h = 0,01$, $f'(1) \simeq \frac{f(1,01) - f(1)}{0,01} \simeq 4,060$

et avec un schéma centré, $f'(1) \simeq \frac{f(1,01) - f(0,99)}{0,01} \simeq 4,0004$

L'erreur relative est :

— Schéma décentré : $\epsilon_r \simeq \left| \frac{4 - 4,06}{4} \right| \simeq 0,015 = 1,5\%$

— Schéma centré : $\epsilon_r \simeq \left| \frac{4 - 4,0004}{4} \right| \simeq 10^{-4} = 0.01\%$

À pas égal, le schéma centré est bien plus précis (c'est un schéma d'ordre 2 en h).

Exercice 5.

1.

$$y'(x) + 3y^2(x) = 0 \iff -\frac{y'(t)}{y^2(x)} = 3 \iff \frac{1}{y(t)} = 3x + C \iff y(t) = \frac{1}{3x + C}$$

avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{0 + C} = 1 \iff C = 1$,

et donc, finalement, $y(t) = \frac{1}{3x + 1}$.

On trouve alors $y(1) = \frac{1}{4}$.

2. Avec $\varphi(x, y) = -3y^2$ et un pas $h = 0,2$,

- $y_0 = y(0) = 1$
- $y(h) \simeq y_1 = y_0 - 0,2 \times 3y_0^2 = 0,4$
- $y(2h) \simeq y_2 = y_1 - 0,2 \times 3y_1^2 \simeq 0,304$
- $y(3h) \simeq y_3 = y_2 - 0,2 \times 3y_2^2 \simeq 0,248$
- $y(4h) \simeq y_4 = y_3 - 0,2 \times 3y_3^2 \simeq 0,211$
- $y(1) = y(5h) \simeq y_5 = y_4 - 0,2 \times 3y_4^2 \simeq 0,185$

3. L'erreur relative est $\epsilon_r = \left| \frac{1/4 - 0,185}{1/4} \right| \simeq 0,26 = 26\%$

4. On peut utiliser aussi RK2 ou RK4.