# MODÉLISATION ET SIMULATION

Mercredi 20 janvier 2020 - 1h30

## Corrigé

**Exercice 1.** Le programme affiche 26 :
u=1 ; s=1
u=3 ; s=4
u=7 ; s=11
u=15 ; s=26

**Exercice 2.**

1. $f'(x) = 6x^2 + 5$, or $x^2 \geqslant 0$ et donc $f'(x) \geqslant 5 > 0$ et $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
   De plus $f(0) = -2 < 0$ et $f(1) = 5 > 0$ et donc, comme $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution sur $[0; 1]$.
2. • $m = (0+1)/2 = 0,5$ et $f(0,5) = 0,75 > 0$ donc $\alpha \in ]0; 0,5[$.
   • $m = (0+0,5)/2 = 0,25$ et $f(0.25) \simeq -0,7 < 0$ donc $\alpha \in ]0,25; 0,5[$
   • $m = (0,25+0,5)/2 = 0,375$ et $f(0,375) \simeq -0,02 < 0$ donc $\alpha \in ]0,375, 0,5[$
   • $m = (0,375+0,5)/2 = 0,4375$ et $f(0,4375) \simeq 0,3 > 0$ donc $\alpha \in ]0,375, 0,4375[$
3. On part de $x_0 = 0$, et on trouve :
   • $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,4$
   • $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} \simeq 0,3785$
   • $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} \simeq 0,3783$
   • $x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)} \simeq -0,3783$

**Exercice 3.**

1. $$I = \int_0^2 e^{0,5x} dx = \left[\frac{1}{0,5} e^{0,5x}\right]_0^2 = 2e^1 - 2 \simeq 3,437$$
2. Avec $h = 0,5$, on a le maillage $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1,5$ et $x_4 = 2$ et
$$I = \int_0^2 f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = 0,5\Big(f(0) + f(0,5) + f(1) + f(1,5)\Big) = 3,025$$

L'erreur relative est
$$\epsilon_r = \left|\frac{3,437 - 3,025}{3,437}\right| \simeq 0,12 = 12\%$$

3. L'estimation numérique peut être améliorée soit en utilisant un maillage plus fin, une valeur plus petite pour le pas $h$, ou en utilisant une autre méthode numérique, par exemple la méthode des trapèzes ou de Simpson.

**Exercice 4.**

1. $f'(x) = 3x^2$ et $f'(1) = 3$.
2. Schéma décentré à droite, avec un pas $h = 0,1$, $f'(1) \simeq \dfrac{f(1,1) - f(1)}{0,1} = 3,31$
3. Schéma centré, avec un pas $h = 0,1$, $f'(1) \simeq \dfrac{f(1,1) - f(0,9)}{0,1} = 3,01$
4. Les erreurs relatives sont :
   — Schéma décentré : $h = 0,1$, $\epsilon_r \simeq 0,1 = 10\%$
   — Schéma centré : $h = 0,1$, $\epsilon_r \simeq 0,0033 = 0,33\%$
   À pas égal, le schéma centré est bien plus précis (c'est un schéma d'ordre 2 en $h$).

**Exercice 5.**

1. $$y'(t) + 2y^2(t) = 0 \iff -\frac{y'(t)}{y^2(t)} = 2 \iff \frac{1}{y(t)} = 2t + C \iff y(t) = \frac{1}{2t + C}$$
   avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{0 + C} = 1 \iff C = 1$,
   et donc, finalement, $y(t) = \dfrac{1}{2t + 1}$.
   On trouve alors $y(1) = \dfrac{1}{3}$.
2. Avec $\varphi(x, y) = -2y^2$ et un pas $h = 0,2$,
   - $y_0 = y(0) = 1$
   - $y(h) \simeq y_1 = y_0 - 0,2 \times 2y_0^2 = 0,6$
   - $y(2h) \simeq y_2 = y_1 - 0,2 \times 2y_1^2 \simeq 0,4560$
   - $y(3h) \simeq y_3 = y_2 - 0,2 \times 2y_2^2 \simeq 0,3728$
   - $y(4h) \simeq y_4 = y_3 - 0,2 \times 2y_3^2 \simeq 0,3172$
   - $y(1) = y(5h) \simeq y_5 = y_4 - 0,2 \times 2y_4^2 \simeq 0,2770$
3. On peut utiliser aussi RK2 ou RK4.