MODÉLISATION ET SIMULATION

Vendredi 24 janvier 2020 - 1h30

Sans documents (Formulaire en fin d'énoncé) - Calculatrice autorisée

Exercice 1 Quelle est la valeur de la variable u, affichées en fin du programme Scilab ci-contre ?

```
u=0
n=4
for i=1:n
   u=3*u+2
end
disp(u)
```

Exercice 2 **Résolution approchée d'une équation de degré 3**
On cherche à résoudre l'équation $(E) : 2x^3 + 5x - 2 = 0$

1. En étudiant les variations de la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 + 5x - 2$ montrer que l'équation (E) admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$.
2. En utilisant la méthode par dichotomie calculer une valeur approchée de la solution α.
   On effectuera quatre itérations de la méthode, et on précisera à chacune d'entre elle l'encadrement obtenu.
3. En utilisant la méthode de Newton, en partant de la valeur initiale $x_0 = 0$, calculer une valeur approchée de α.
   On effectuera quatre itérations de la méthode, en précisant à chacune d'entre elle les valeurs approchées obtenues (arrondies à 10^{-4} près).

Exercice 2. Ajustement affine par moindres carrés

Les données ci-dessous sont relatives à des mesures de la limite élastique y selon la résistance à la traction x, en MPa, d'alliages d'or destinés à des prothèses dentaires.

x_i	907	1148	1638	1678
y_i	617	724	1260	1296

On donne de plus $\overline{x} = 1342,75$ et $\overline{y} = 974,25$.

1. Tracer sur un graphique le nuage de points $(x_i; y_i)$.
   Graphiquement, un ajustement affine semble-t'il pertinent ?

2. Calculer l'équation de la droite d'ajustement des moindres carrés.
3. Estimer la valeur moyenne de la limite élastique pour une résistance à la traction $x = 1290$MPa.

Exercice 3. Approximation d'une dérivée

On cherche à approximer la dérivée en $x = 1$ de la fonction f définie par $f(x) = x^4 + 5$.

1. Donner la valeur exacte de $f'(1)$.
2. Calculer une valeur approchée de $f'(1)$ avec un schéma décentré à droite en utilisant un pas $h = 0,01$, puis avec un schéma centré et le même pas.
   Comparer la précision de ces résultats.

Exercice 4. Résolution approchée d'une équation différentielle

On se propose de résoudre l'équation différentielle $y'(t)+3y^2(t) = 0$, avec la condition initiale $y(0) = 1$.

1. Résoudre cette équation et montrer que la solution exacte s'écrit sous la forme $y(x) = \dfrac{1}{1+3t}$.
   Donner la valeur exacte $y(1)$ de cette solution en $x = 1$.
2. En utilisant le schéma d'Euler, calculer numériquement $y(1)$ avec un pas $h = 0,2$.
3. Quelle est l'erreur relative obtenue pour la valeur approchée de $y(1)$?
4. Citer deux méthodes qui permettent de résoudre numériquement cette équation avec une meilleure précision.

FORMULAIRE

Algorithme de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ajustement affine. La droite d'ajustement des moindres carrés a pour équation $y = ax + b$ avec

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \quad \text{et} \quad b = \overline{y} - a\overline{x}$$

en notant $\overline{x}$ la moyenne des valeurs x_i, $\overline{y}$ la moyenne des valeurs y_i, $\overline{xy}$ la moyenne des valeurs x_iy_i, et $\overline{x^2}$ la moyenne des valeurs x_i^2.

Schéma décentré à droite, avec un pas h : $f'(a) \simeq \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Schéma centré, avec un pas h : $f'(a) \simeq \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$

Méthode d'Euler. On considère l'équation différentielle du premier ordre : $y'(x) = \varphi(x, y(x))$.

Le schéma d'Euler s'écrit :

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i)$$