MODÉLISATION ET SIMULATION

Lundi 21 janvier 2018 - 1h30

Sans documents (Formulaire en fin d'énoncé) - Calculatrice autorisée

Exercice 1. Résolution approchée d'une équation de degré 3

On cherche à résoudre l'équation $(E) : x^3 - 12x - 5 = 0$

1. En étudiant les varations de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 12x - 5$ montrer que l'équation (E) admet exactement trois solutions.

   Vérifier en particulier que l'équation (E) admet une solution $\alpha \in [-2; 0]$

2. En utilisant la méthode par dichotomie en partant de l'intervalle $[-2; 0]$, calculer une valeur approchée de la solution α.

   On effectuera quatre itérations de la méthode, et on précisera à chacune d'entre elle l'encadrement obtenu.

   On prendra finalement le milieu du dernier intervalle comme valeur approchée de α.

3. En utilisant la méthode de Newton, en partant de la valeur initiale $x_0 = 1$, calculer une valeur approchée de α.

   On effectuera quatre itérations de la méthode, en précisant à chacune d'entre elle les valeurs approchées obtenues (arrondies à 10^{-4} près).

4. La valeur approchée de α est en fait, à 10^{-4} près $\alpha \simeq -0,4230$.

   Comparer l'efficacité des deux méthodes.

Exercice 2. Calcul approché d'une intégrale

On cherche à calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 e^{0,5x} dx$.

1. Calculer la valeur exacte de I.

   Donner une valeur arrondie à 10^{-3} près de cette valeur.

2. Calculer une valeur approchée de I en utilisant la méthode des rectangles à gauche avec un pas $h = 0,5$.

   Donner une valeur arrondie à 10^{-3} près de cette valeur.

3. Calculer une valeur approchée de I en utilisant la méthode des trapèzes avec un pas $h = 0,5$.

   Donner une valeur arrondie à 10^{-3} près de cette valeur.

4. Comparer l'écart relatif de chaque méthode avec la valeur théorique.

5. Comment améliorer l'estimation numérique de l'intégrale ? Citer deux méthodes.

Exercice 3. Approximation d'une dérivée

On cherche à approximer la dérivée en $x = 1$ de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 2$.

1. Donner la valeur exacte de $f'(1)$.
2. Calculer une valeur approchée de $f'(1)$ avec un schéma décentré à droite en utilisant un pas $h = 0,1$ puis $h = 0,01$.
3. Calculer une valeur approchée de $f'(1)$ avec un schéma centré en utilisant un pas $h = 0,1$ puis $h = 0,01$.
4. Comparer la précision de ces résultats.

Exercice 4. Résolution approchée d'une équation différentielle

On se propose de résoudre l'équation différentielle $y'(t)+2y^2(t) = 0$, avec la condition initiale $y(0) = 1$.

1. Résoudre cette équation.

   Montrer que la solution exacte peut s'écrire sous la forme $y(x) = \dfrac{1}{1+2t}$.

   Donner la valeur exacte $y(1)$ de cette solution en $x = 1$.
2. En utilisant le schéma d'Euler, calculer numériquement $y(1)$ avec un pas $h = 0,2$.
3. Quelle est l'erreur relative obtenue pour la valeur approchée de $y(1)$?
4. Citer deux méthodes qui permettent de résoudre numériquement cette équation avec une meilleure précision.

FORMULAIRE

Algorithme de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Méthode des rectangles à gauche sur l'intervalle $[a, b]$.
Avec $n + 1$ points de maillage $x_0 = a$, x_1, x_2, …, $x_n = b$ avec un pas régulier h,

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Méthode des trapèzes sur l'intervalle $[a, b]$.
Avec $n + 1$ points de maillage $x_0 = a$, x_1, …, $x_n = b$ avec un pas régulier h,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

Schéma décentré à droite, avec un pas h : $f'(a) \simeq \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Schéma centré, avec un pas h : $f'(a) \simeq \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$

Méthode d'Euler. On considère l'équation différentielle du premier ordre : $y'(x) = \varphi(x, y(x))$.

Le schéma d'Euler s'écrit

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i)$$