# MODÉLISATION ET SIMULATION

Lundi 21 janvier 2018 - 1h30

## Corrigé

**Exercice 1.**

1. $f' = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2)$ donc $f$ croissante sur $]-\infty;-2]$, décroissante sur $[-2;2]$ puis croissante sur $[2;+\infty[$.

   De plus $f(-2) = 11 > 0$ donc $f(x) = 0$ admet une solution sur $]-\infty;-2[$, et $f(2) = -21 < 0$ donc $f(x) = 0$ admet une solution sur $]-2;2[$.

   Enfin, comme $f(4) = 11 > 0$, $f(x) = 0$ admet une solution sur $]2;4[$.

   Comme $f(-2) = 11 > 0$ et $f(0) = -5 < 0$, $f(x) = 0$ la deuxième solution est dans $]-2;0[$.

2. • $m = -1$ et $f(-1) = 6 > 0$ donc $\alpha \in ]-1;0[$.
   - $m = -0.5$ et $f(-0.5) = 0,875 > 0$ donc $\alpha \in ]-0,5;0[$
   - $m = -0,25$ et $f(-0,25) \simeq -2 < 0$ donc $\alpha \in ]-0,5;-0,25[$
   - $m = -0,375$ et $f(-0,375) \simeq -0,5 < 0$ donc $\alpha \in ]-0,5;-0,375[$

   On trouve donc la valeur approchée $\alpha \simeq -0,4375$

3. On part de $x_0 = 1$, et on trouve :
   - $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \simeq -0,7778$
   - $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} \simeq -0,3985$
   - $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} \simeq -0,4229$
   - $x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)} \simeq -0,4230$

4. Avec la dichotomie, l'erreur relative est $\left|\dfrac{-0,4230-(-0,4375)}{-0,4230}\right| \simeq 3,4\%$, tandis que pour Newton, l'erreur relative à $10^{-4}$ près est nulle.

**Exercice 2.**

1. 
$$I = \int_0^2 e^{0,5x}dx = \left[\frac{1}{0,5}e^{0,5x}\right]_0^2 = 2e^1 - 2 \simeq 3,437$$

2. Avec $h=0,5$, on a le maillage $x_0=0$, $x_1=0,5$, $x_2=1$, $x_3=1,5$ et $x_4=2$ et

$$\begin{aligned} I=\int_0^2 f(x)dx \simeq h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right) &= 0,5\Big(f(0)+f(0,5)+f(1)+f(1,5)\Big) \\ &= 3,025 \end{aligned}$$

3. Avec $h=0,5$ et donc le même maillage,

$$\begin{aligned} I=\int_0^2 f(x)dx &= \frac{h}{2}\left(f\left(x_0\right)+2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i\right)+f\left(x_n\right)\right) \\ &= 0,25\Big(f(0)+2\Big(f(0,5)+f(1)+f(1,5)\Big)+f(2)\Big) \\ &\simeq 3,454 \end{aligned}$$

4. Les erreurs relatives sont, pour les rectangles :

$$\epsilon_r=\left|\frac{3,437-3,025}{3,437}\right|\simeq 0,12=12\%$$

et pour les trapèzes,

$$\epsilon_r=\left|\frac{3,437-3,454}{3,437}\right|\simeq 0,005=0,5\%$$

La méthode des trapèzes est ici environ 20 fois plus précise.

5. L'estimation numérique peut être améliorée soit en utilisant un maillage plus fin, une valeur plus petite pour le pas $h$, ou en utilisant une autre méthode numérique, par exemple la méthode de Simpson.

**Exercice 3.**

1. $f'(x)=3x^2$ et $f'(1)=3$.
2. Schéma décentré à droite, avec un pas $h=0,1$, $f'(1)\simeq\dfrac{f(1,1)-f(1)}{0,1}=3,31$

   avec un pas $h=0,01$, $f'(1)\simeq\dfrac{f(1,01)-f(1)}{0,01}=3,03$
3. Schéma centré, avec un pas $h=0,1$, $f'(1)\simeq\dfrac{f(1,1)-f(0,9)}{0,1}=3,01$

   avec un pas $h=0,01$, $f'(1)\simeq\dfrac{f(1,01)-f(0,99)}{0,01}=3,0001$
4. L'erreur relative est :
   — Schéma décentré : $h=0,1$, $\epsilon_r\simeq 0,1=10\%$
     et $h=0,01$, $\epsilon_r\simeq 0,01=1\%$
   — Schéma centré : $h=0,1$, $\epsilon_r\simeq 0,0033=0,33\%$
     et $h=0,01$, $\epsilon_r\simeq 0,000033=0,0033\%$

   À pas égal, le schéma centré est bien plus précis (c'est un schéma d'ordre 2 en $h$).

**Exercice 4.**

1. $$y'(t)+2y^2(t)=0 \iff -\frac{y'(t)}{y^2(t)}=2 \iff \frac{1}{y(t)}=2t+C \iff y(t)=\frac{1}{2t+C}$$

   avec la condition initiale $y(0)=\dfrac{1}{0+C}=1 \iff C=1$,

   et donc, finalement, $y(t)=\dfrac{1}{2t+1}$.

   On trouve alors $y(1)=\dfrac{1}{3}$.

2. Avec $\varphi(x,y)=-2y^2$ et un pas $h=0,2$,
   - $y_0=y(0)=1$
   - $y(h)\simeq y_1=y_0-0,2\times 2y_0^2=0,6$
   - $y(2h)\simeq y_2=y_1-0,2\times 2y_1^2\simeq 0,4560$
   - $y(3h)\simeq y_3=y_2-0,2\times 2y_2^2\simeq 0,3728$
   - $y(4h)\simeq y_4=y_3-0,2\times 2y_3^2\simeq 0,3172$
   - $y(1)=y(5h)\simeq y_5=y_4-0,2\times 2y_4^2\simeq 0,2770$

3. L'erreur relative est $\epsilon_r=\left|\dfrac{1/3-0,2770}{1/3}\right|\simeq 0,17=17\%$

4. On peut utiliser aussi RK2 ou RK4.