Loi binomiale pour le calcul de probabilités

BTS SIO
Mathématiques approfondies

I - Répétition d'expériences aléatoires

Exercice 0 On dispose d'une pièce déséquilibrée : quand on la lance, on obtient Pile avec une probabilité $p = 0,2$.

1. On lance cette pièce 2 fois successivement.
   a) Représenter la situation par un arbre.
   b) a) Combien de façons y-a-t'il d'obtenir exactement 0 fois Pile ? Quelle est la probabilité ?
      b) Combien de façons y-a-t'il d'obtenir exactement 1 fois Pile ? Quelle est la probabilité ?
      c) Combien de façons y-a-t'il d'obtenir exactement 2 fois Pile ? Quelle est la probabilité ?
      d) On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois Pile obtenu. Compléter le tableau de la loi de probabilité de X, pour le nombre de Pile k obtenus, avec les résultats calculés précédemment :

k	0	1	2
$P(X=k)$			

2. Même question en lançant 3 fois successivement cette pièce : poursuivre l'arbre de la question précédente et compléter la nouvelle loi de probabilité :

k	0	1	2	3
$P(X=k)$				

3. Même question en lançant 4 fois successivement cette pièce :

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$					

4. Une pièce donne Pile avec une probabilité de 0,9. On la lance 10 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 fois Pile.

1) Coefficients binomiaux

Définition *Le nombre de façons d'obtenir k succès parmi n répétitions s'appelle* ***coefficient binomial****, noté* $\binom{n}{k}$*, qui se lit "k parmi n".*

Le ***Triangle de Pascal*** *contient ces coefficients binomiaux :*

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5			...	...		

Relation de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

II - Loi binomiale

Définition *On considère une répétition de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes (i.i.), avec à chacune une probabilité de succès p.*
La variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus, sur les n répétitions, suit alors la ***loi binomiale*** *de paramètre n et p.*
On note $\mathcal{B}(n;p)$ cette loi de probabilité et on a alors la formule : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
On a de plus :
— *l'espérance de X est $E(X)=np$*
— *l'écart type est $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$*

Exemple : On lance 10 fois successivement un dé équilibré (ou 10 dés identiques à la fois...) et on s'intéresse au nombre de 1 obtenus.
Ces répétitions sont i.i. (identiques et indépendantes). Le succès à chaque répétition est d'obtenir un 1, de probabilité $p=\dfrac{1}{6}$.
On peut noter X la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus (nombre de succès) sur les $n=10$ lancers.
X suit alors la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\dfrac{1}{6}$, et avec la calculatrice, on peut alors calculer les probabilités :
— Obtenir exactement 10 fois un 1 : $P(X=10)\simeq\ldots$
— Obtenir exactement 5 fois un 1 : $P(X=10)\simeq\ldots$
— Obtenir au moins 4 fois un 1 : $P(X\geqslant 4)\simeq\ldots$

Exercice 1 La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0,15$.

1. Donner les expressions et calculer $P(X=6)$, $P(X=15)$, $P(X\leqslant 15)$, $P(X\geqslant 16)$ et $P(13\leqslant X\leqslant 17)$.
2. Préciser l'espérance et l'écart type de X.
3. Déterminer le plus petit entier a tel que $P(X\leqslant a)\geqslant 0,95$.
4. Calculer les probabilités $P_{X\leqslant 10}(X=9)$ et $P_{X\geqslant 10}(X\leqslant 15)$.

Exercice 2 Un tireur à l'arc touche sa cible aléatoirement 3 fois sur 5.
Il tire 10 flèches. Quelle est la probabilité pour qu'il touche 7 fois, ou plus, la cible ?

Exercice 3 Un élève répond au hasard aux 6 questions d'un QCM. À chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

1. Montrer que la loi de probabilité de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que l'élève a d'avoir exactement 3 bonnes réponses.
3. Calculer la probabilité que l'élève a d'avoir au moins 3 bonnes réponses.
4. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

Exercice 4 Dans une population, une personne sur 100 est un centenaire.

1. Quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi un groupe de 100 personnes choisies au hasard ?
2. Quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi un groupe de 200 personnes choisies au hasard ?

Exercice 5 Dans chacun des cas suivants, la variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Donner le cas échéant les valeurs de ses paramètres.

1. On lance 5 fois successivement un dé à jouer truqué, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de 2 obtenus parmi ces lancers.
2. On lance 5 fois successivement un dé à jouer, et on note X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer pour lequel on obtient le chiffre 6.
3. On lance 10 fois successivement 2 dés à jouer, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où une somme de 10 est obtenue en ajoutant les chiffres des 2 dés.
4. Une branche présente 10 fleurs : 2 blanches et 8 roses. On cueille, successivement et au hasard, 3 fleurs et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fleurs blanches cueillies.
5. On fait un sondage en interrogeant successivement 10 personnes dans un groupe de 20 personnes. On note X le nombre de personnes qui ont répondu "Oui".
6. Dans une population de 10 millions personnes, on fait un sondage en interrogeant successivement 100 personnes. On note X le nombre de personnes qui ont répondu "Oui".

Exercice 6 Une machine produit des pièces dont, en moyenne, 5 % sont défectueuses.
On prépare des lots en prélèvant au hasard 10 pièces dans la production. Le nombre de pièces dans le stock est assez important pour que l'on puisse considérer le tirage comme étant avec remise.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses sur nos 10 pièces prélevées.

1. Montrer que la loi de probabilité de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer les probabilités des événements : "$X = 0$", "$X = 1$", $X = 2$, et "$X \geqslant 3$".

Exercice 7 Une association compte 112 adhérents. Elle organise, comme chaque année, son assemblée générale. Pour que les décisions prises au cours de cette assemblée aient une valeur légale, il est nécessaire que plus de la moitié des adhérents assiste à l'assemblée. Une étude statistique sur les années précédentes à mis en évidence que chaque membre participe à l'assemblée avec une probabilité de 60%, indépendamment des autres membres. Quelle est la probabilité que le quorum (plus de la moitié des adhérents présents) soit atteint lors de la prochaine assemblée ?

Exercice 8 En france, il y a environ 12 % de gauchers. On considère une classe de 30 élèves, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de gauchers dans cette classe.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Préciser ses paramètres.
2. Combien d'élèves gauchers peut-on s'attendre à trouver dans la classe ?
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait un seul gaucher dans la classe.
4. Calculer la probabilité qu'il y ait 2 gauchers ou plus dans la classe.
5. Déterminer le plus petit entier k tel que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,99$. Interpréter ce nombre.

Exercice 9 Un homme se présente dans un village gaulois et se déclare devin.
Les habitant sceptiques se proposent de tester ses dons en lui demandant de deviner les résultats de 10 lancers d'une pièce équlibrée. Il donne 8 fois la bonne réponse.

1. On suppose que les réponses du devin sont données au hasard.
   Calculer dans ce cas la probabilité qu'il donne 8 fois la bonne réponse.
2. Les habitants du village (experts bien sûr en probabilité) seront-ils enclins à croire ce devin ?

Exercice 10 Une compagnie aérienne vend des billets pour un vol sur un avion dont la capacité est de 100 voyageurs. Une étude statistique a montré qu'un client ayant acheté un billet se présente à l'embarquement avec une probabilité p = 0,95 (en d'autres termes, il y a une probabilité de 5% pour qu'une personne ne se présente pas au décollage, rate son avion, ...).

1. La compagne vend 105 billets pour un vol. Quelle est la probabilité pour qu'aucune personne ne se présente à l'embarquement sans avoir de place ?
2. La compagnie voudrait vendre, dans les mêmes conditions, 110 billets pour ce vol. Quel risque prend cette fois la compagnie ?

Exercice 11 Pour contrôler des lots d'articles on procède de la manière suivante : on prélève un article au hasard dans le lot, s'il est défectueux le lot est déclaré mauvais, sinon on en prélève un deuxième. S'il est défectueux on déclare le lot mauvais, sinon on en prélève un troisième. S'il est défectueux on déclare le lot mauvais, sinon on accepte le lot.
On note p la proportion d'articles défecteux et on considère que le nombre important d'articles permet de d'assimiler le tirage à un tirage avec remise.

1. Déterminer en fonction de p la probabilité de refuser le lot.
2. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'articles prélevés. Déterminer l'espérance de Y.
3. Comparer ces résultats à ceux que l'on aurait obtenus en prélevant directement trois articles et en refusant le lot si au moins l'un de ces articles était défectueux.

Exercice 12 Dans une population de grand effectif, on a observé que 5% des individus sont allergiques au médicament A et 40% sont allergiques au médicament B.
Ces allergies sont détectées par des tests effectués en laboratoire et ce de façon indépendante. On examine un échantillon de n analyses choisies au hasard. On note X la variable aléatoire qui associe à n analyses le nombre d'individus allergiques à A qu'elles révèlent.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. On suppose que $n = 10$. Calculer à 10^{-2} près les probabilités de chacun des événements suivants :
   a) aucune analyse ne révèle l'allergie à A ;
   b) au moins deux analyses révèlent l'allergie à A.
3. Un organisme tiers établit que 2% des individus sont allergiques à A et à B simultanément. Peut-on en conclure que les événements "être allergique à A" et "être allergique à B" sont indépendants ?
4. On considère la variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,4$.
   a) Déterminer le plus petit entier $a$tel que $P(Y \leqslant a) > 0,025$ et le plus petit entier b tel que $P(Y \leqslant b) \geqslant 0,95$.
   b) En déduire un intervalle I tel que $P(Y \in I) \geqslant 0,95$.
   c) Dans un échantillon de 100 analyses, on a observé que 30 individus révèlent l'allergie B. Que peut-on en conclure ?

Exercice 13 ** On rappelle la formule générale : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ où $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

1. a) Calculer, et/ou en utilisant le triangle de Pascal, $\binom{3}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{4}$, $\binom{12}{10}$ et $\binom{12}{2}$.
   b) Montrer que pour tous entiers n et p, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
   c) Démontrer en utilisant la formule générale de calcul des coefficients binomiaux la relation de Pascal.
2. Rappeler la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \ldots$
   a) Développer $(1+x)^4$. Calculer alors $1001^4 - 999^4$
   b) Calculer les sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$, $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $S_3 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$, $S_4 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$