Généralités sur les fonctions

BTS SIO

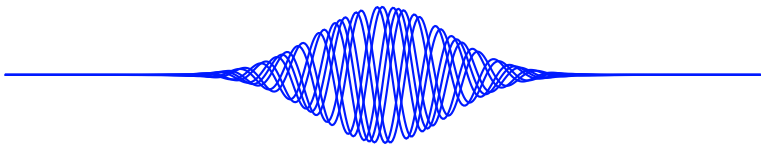


Table des matières

I Généralités - Définition d'une fonction 2

II Courbe représentative d'une fonction 3

III Sens de variation des fonctions 5

IV Fonctions de référence 6

1 Fonctions affines 6

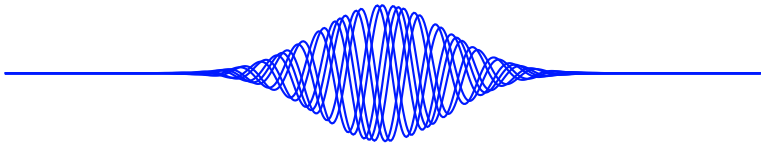
2 Fonction carré 7

3 Fonction racine carrée 7

4 Fonction inverse 8

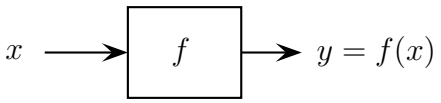
5 Fonction exponentielle 8

6 Fonction ln, logarithme népérien 9



I Généralités - Définition d'une fonction

Définition: *Une **fonction** est un procédé qui permet d'associer à un nombre, un unique autre nombre.*



On utilise en général la notation $f : x \mapsto f(x)$

Le nombre $y = f(x)$ *est* ..... *de* x *par la fonction* f.

Si x *vérifie* $f(x) = y$, *on dit que* x *est* ..... *de* y.

Exercice 1 **Programme de calcul : définition algébrique d'une fonction**

On considère le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre entier naturel	10	5	x
Multiplier par 2 Ajouter 1 Elever au carré Soustraire 1 Multiplier par 3			
Résultat	1320		

1. Compléter le tableau et montrer que le résultat, pour un nombre réel x quelconque est $12x^2 + 12x$.
2. On a ainsi défini la fonction f par l'expression algébrique : $f : x \mapsto f(x) =$ ...
3. Quel est le résultat du programme si on introduit le nombre 15 ? le nombre $3,5$?
4. Quel nombre peut-on introduire de façon à ce que le résultat du programme soit nul ?

Exercice 2 Soit la fonction définie sur l'intervalle $[-3; 5]$ par l'expression : $f(x) = x^2 - x + 2$.

a) Calculer les images de 4 et 5.

b) Montrer que 0 et 1 sont des antécédents de 2 par f.

Exercice 3 Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 - x$

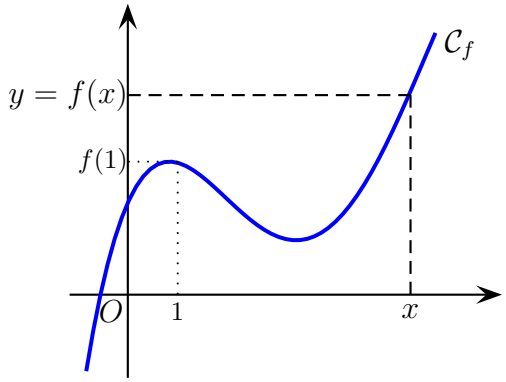
Déterminer l'image de -5 ; 0 ; 3 et 10, puis rechercher les antécédents de 0.

II Courbe représentative d'une fonction

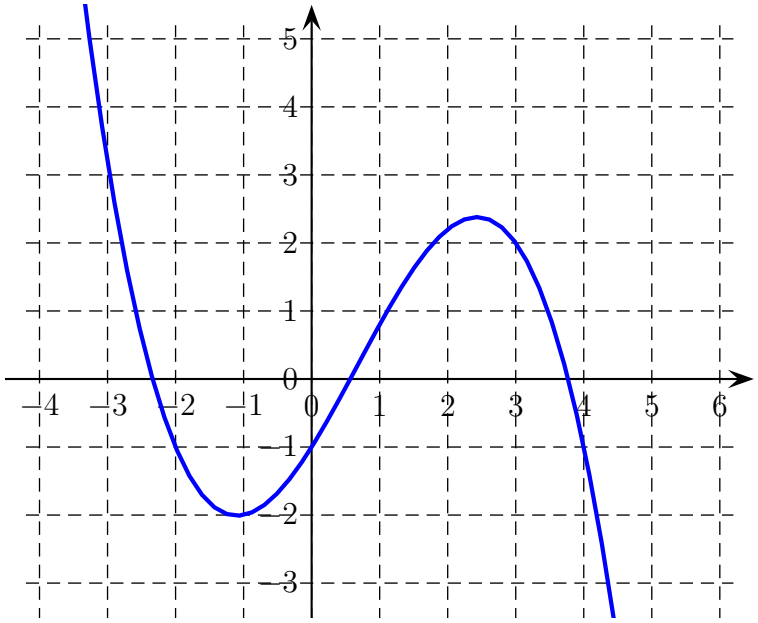
Définition: *La courbe représentative (ou représentation graphique) de la fonction f est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $y = f(x)$.*

En d'autres termes, le point $M(x;y)$ appartient à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f si et seulement si $y = f(x)$.

$M(x;y) \in \mathcal{C}_f \iff y = f(x)$



Exercice 4 Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f.
Les points $A(-3;3)$, $B(-2;-1)$, $C(-1;-2)$, $D(0;-1)$, $E(1;0,9)$, $F(3;2)$ et $G(4;-1)$ appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_f$.



Compléter :

a) L'image de 3 par f est $f(3) = \ldots$

b) L'image de -2 par f est $f(-2) = \ldots$

c) D'après le point E, un antécédent de $0,9$ par f est $f(\ldots) = 0,9$

d) Le nombre d'antécédents de -1 par f est $\ldots$

e) Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$ est $\ldots$

f) Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ est $\ldots$

g) Dresser le tableau de variation de la fonction f

Exercice 5 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x^2 + 3$.
Cocher (en justifiant), parmi les points suivants, ceux qui appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_f$:

☐ $A(0;3)$ ☐ $B(1;6)$ ☐ $C(2;11)$ ☐ $D(-2;-11)$ ☐ $E(-2;11)$ ☐ $F(5;53)$

Exercice 6 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

1. Compléter le tableau de valeurs :

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$					

2. Placer tous ces points dans un repère du plan, et tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 7 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = -3x + 2$.

1. Dire, en justifiant, si les points suivants appartiennent à $\mathcal{C}_f$:

   ☐ $A(1;-1)$ ☐ $B(-3;11)$ ☐ $C(2;4)$ ☐ $D(-5;17)$ ☐ $E(-2;-8)$ ☐ $F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

2. Donner deux autres points appartenant à $\mathcal{C}_f$.
3. Placer tous ces points dans un repère du plan, et tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$. Que remarque-t-on ?
4. Résoudre graphiquement puis par le calcul
   a) l'équation $f(x) = 1$
   b) l'inéquation $f(x) \leqslant 1$
   c) l'inéquation $f(x) \leqslant 0$. Dresser alors le tableau de signe de $f(x)$.

Exercice 8 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

1. Dire si les points suivants appartiennent à $\mathcal{C}_f$:

   ☐ $A(1;2)$ ☐ $B(-3;34)$ ☐ $C(2;4)$ ☐ $D(5;66)$ ☐ $E(-2;16)$ ☐ $F\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$

2. Donner deux autres points appartenant à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 9 Soit la fonction f définie par l'expression $f(x) = 2x^2 - x$.

1. Compléter le tableau de valeurs :

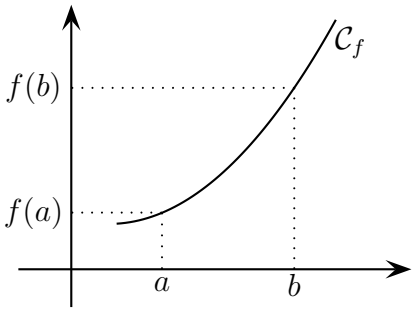
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

2. Placer tous ces points dans un repère du plan, et tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. Donner, à partir de ce graphique, le tableau de variation de la fonction f.
   Quel est le minimum de la fonction f ?
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ à l'aide de la calculatrice, et chercher alors une valeur plus précise pour ce minimum.

III Sens de variation des fonctions

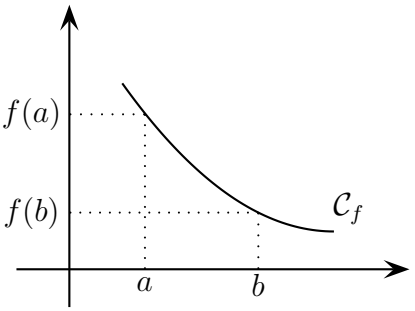
Définition: *Une fonction f est croissante lorsqu'elle conserve l'ordre.*
Pour tous a, b,

$$a < b \iff f(a) < f(b)$$



Une fonction f est décroissante lorsqu'elle inverse l'ordre.
Pour tous a, b,

$$a < b \iff f(a) > f(b)$$



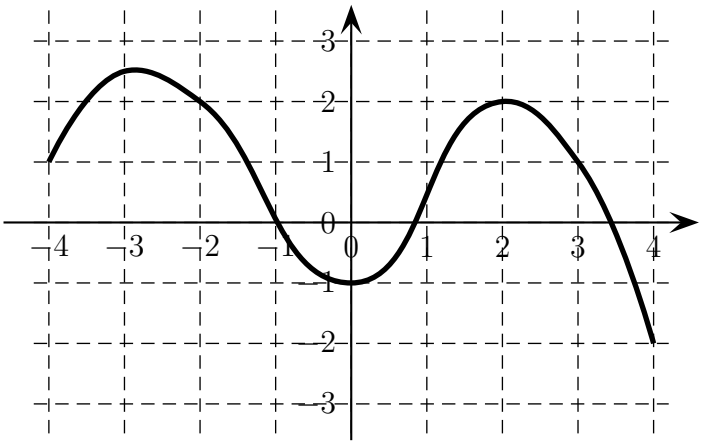
On dit de plus que f est **monotone** lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante : elle ne change pas de sens de variation sur cet intervalle.

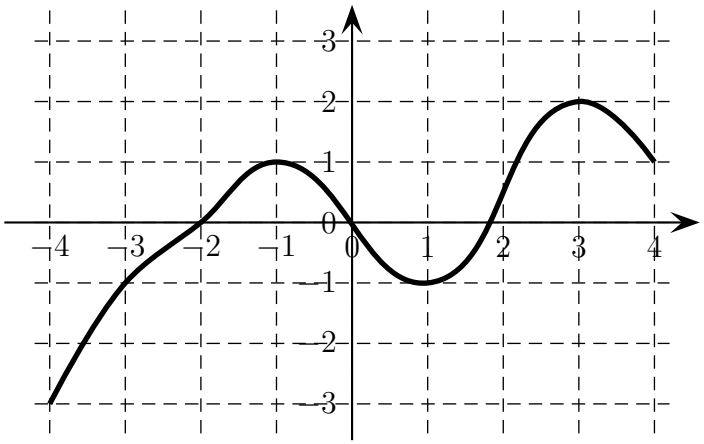
Exercice 10 On considère une fonction f dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-5		3		7		22		$+\infty$
f		↘	$0,5$	↗	1	↘	-8	↗	-2	↘	

Pour chaque affirmation, indiquer, en le justifiant, si elle est vraie, fausse, ou si on ne peut pas savoir :
a) $f(3) \leqslant f(5)$ b) $f(-4) \leqslant f(1)$ c) $f(5) \leqslant f(8)$ d) $f(-4) \leqslant f(8)$

Exercice 11 Dresser dans les deux cas suivant le tableau de variation de la fonction f représentée par la courbe données.





Résoudre graphiquement dans chaque cas :
a) $f(x) = 2$ b) $f(x) = 0$ c) $f(x) = -3$ d) $f(x) > 1$ e) $f(x) \geqslant 0$ f) $f(x) \leqslant -1$

Exercice 12 On considère une fonction f dont on connaît le tableau de variation ci-contre. Indiquer, en le justifiant, pour chaque affirmation suivante si elle est vraie, fausse, ou si on ne peut pas savoir.

x	-10		-3		2		8
f	-5	↗	2	↘	0	↗	25

a) $f(3) < f(6)$ b) $f(-2) < f(0)$ c) $f(-2,5) < f(2,5)$ d) Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$

IV Fonctions de référence

1 Fonctions affines

Définition: *Une fonction affine est une fonction dont l'expression peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$, avec a et b deux nombres réels.*

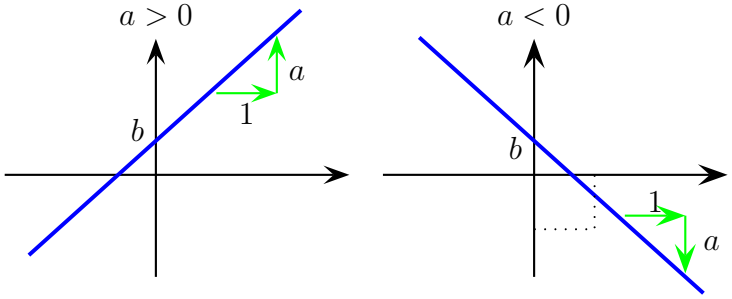
La **courbe représentative** de la fonction affine $f(x) = ax + b$ est **la droite** d'équation $y = ax + b$.

Tableau de valeurs :

x	0	1
$y = f(x)$	b	$a + b$

a est le le **coefficient directeur** de la droite.

b est l'**ordonnée à l'origine** de la droite.



Exercice 13 Tracer dans un même repère les courbes des fonctions $f(x) = 3x - 2$ et $g(x) = -2x + 3$.

Exercice 14 Tracer dans un même repère les courbes des fonctions $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x + 1$.
Déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux courbes.

Exercice 15 On considère les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $y = -2x - 2$ et $y = x + 2$.
Déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

Exercice 16 Soit $f : x \mapsto 2x - 4$. Tracer $\mathcal{C}_f$ et préciser les coordonnées du point A où $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses.
Résoudre alors l'inéquation $f(x) > 0$. Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

Exercice 17 Reprendre l'exercice précédent avec la fonction f définie par $f(x) = -3x + 4$.

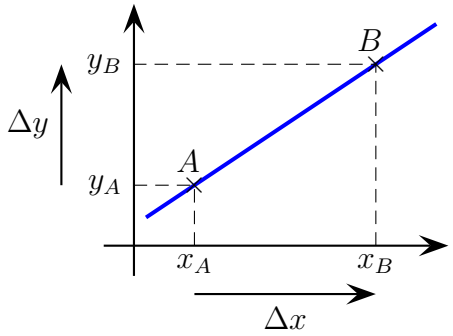
Exercice 18 Dresser les tableaux de signe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x + 12$ b) $g(x) = -2x + 1$ c) $h(x) = 3x$ d) $i(x) = -5x + 10$

Propriété: *Le coefficient directeur de la droite passant par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est*

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Le coefficient directeur est le taux de variation en ordonnée par rapport aux abscisses



Exercice 19 Déterminer le coefficient directeur de la droite passant par les points $A(2; 3)$ et $B(8; 15)$.

Exercice 20 Déterminer le coefficient directeur de la droite passant par $A(-3;-2)$ et $B(5;6)$. Déterminer alors l'équation réduite complète de la droite (AB).

Exercice 21 Déterminer l'équation de la droite (AB) passant par $A(2;-1)$ et $B(10;-17)$.

Exercice 22 On considère les points $E(-2;11)$ et $F(1;2)$. Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de la droite (EF) avec l'axe des ordonnées et du point B d'intersection de (EF) avec l'axe des abscisses.

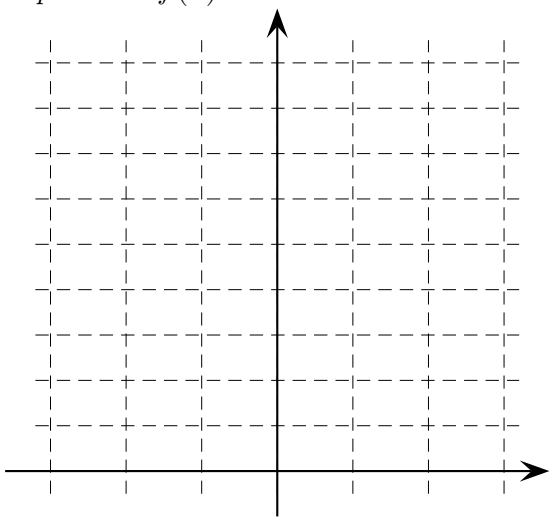
2 Fonction carré

Définition: *La fonction carré est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par l'expression* $f(x) = x^2$.

Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

Sa courbe représentative est une .....



Exercice 23 On considère la fonction $f : x \mapsto 0,5(x+1)^2 - 2$.

a) Dresser un tableau de valeurs pour f pour x allant de -4 à 4 avec un pas de 1.

b) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

c) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$.

d) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 4$.

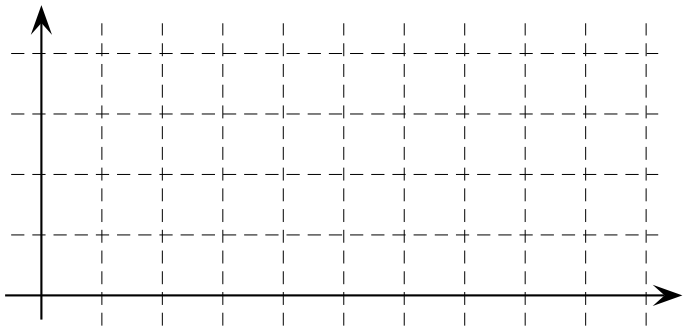
e) Dresser, à l'aide du graphique, le tableau de signe de $f(x)$.

3 Fonction racine carrée

Définition: *La fonction racine carrée est la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par l'expression* $f(x) = \sqrt{x}$.

Tableau de valeurs :

x	0	1	2	4	9
$f(x)$					



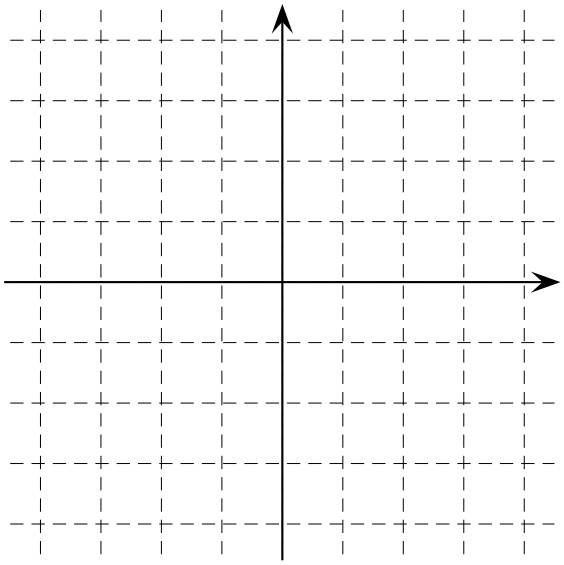
4 Fonction inverse

Définition: *La fonction inverse est la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par l'expression* $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

Sa courbe représentative est une .....

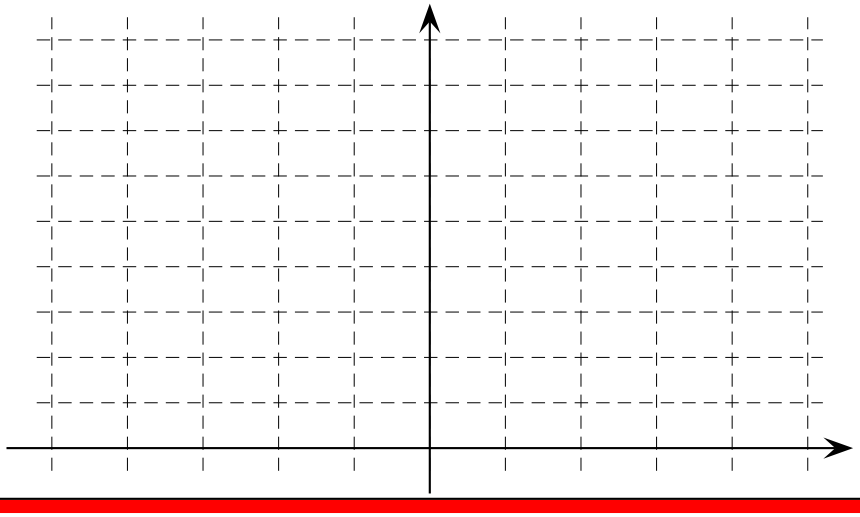


5 Fonction exponentielle

Définition: *La fonction exponentielle est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par l'expression* $f(x) = \exp(x) = e^x$.

Tableau de valeurs approchées :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							



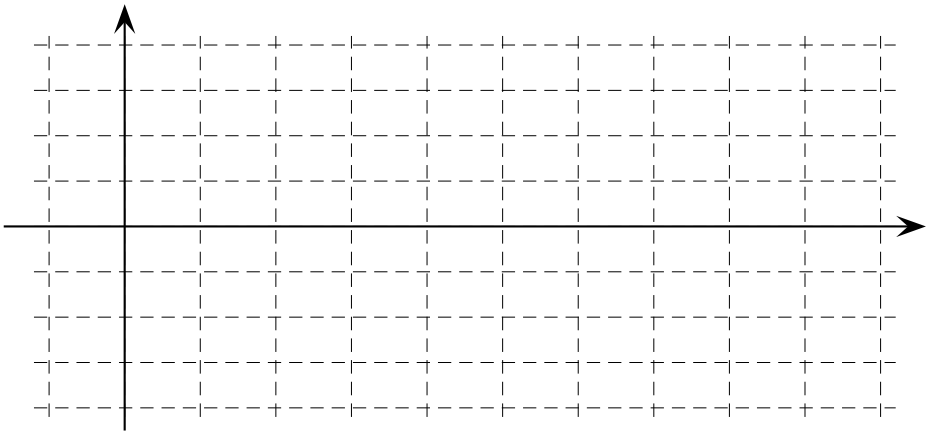
6 Fonction ln, logarithme népérien

Définition: *La fonction logarithme népérien est la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et qui se note* $f(x) = \ln(x)$. *Elle est la fonction réciproque de la fonction exponentielle :*

$$y = e^x \iff \ln(y) = x$$

Tableau de valeurs approchées :

x	0	0,1	0,5	1	2	3	4	9	10
$ln(x)$									



Exercice 24 Déterminer les valeurs de x pour lesquelles :

a) $e^x = 2$ b) $e^x = 100$ c) $e^x = -3$ d) $e^x = 0$ e) $e^{x+2} = 8$ f) $e^{2x-1} = 3$

g) $\ln(x) = 2$ h) $\ln(x) = -2$ i) $\ln(x) = 10$ j) $\ln(x+1) = 10$ k) $\ln(2x-1) = 3$