Dérivées et variation des fonctions

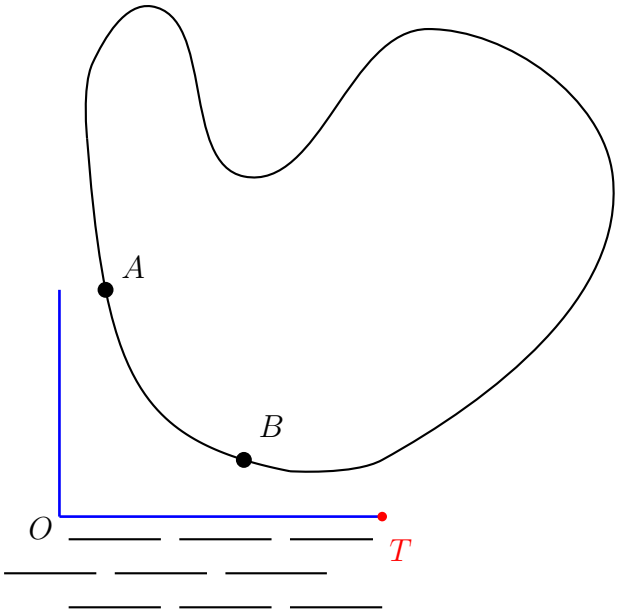
Exercice 1 **Sortie de route**

La courbe suivante est celle d'un circuit automobile sur lequel les véhicules circulent dans le sens horaire inverse (ou sens trigonométrique). Au sud du circuit se trouve une tribune pour les spectateurs.
Lorsqu'un pilote perd le contrôle de son véhicule, sa trajectoire devient alors rectiligne (et uniforme, cf. physique...).

a) Un pilote perd le contrôle en A. Dessiner sa trajectoire ensuite.

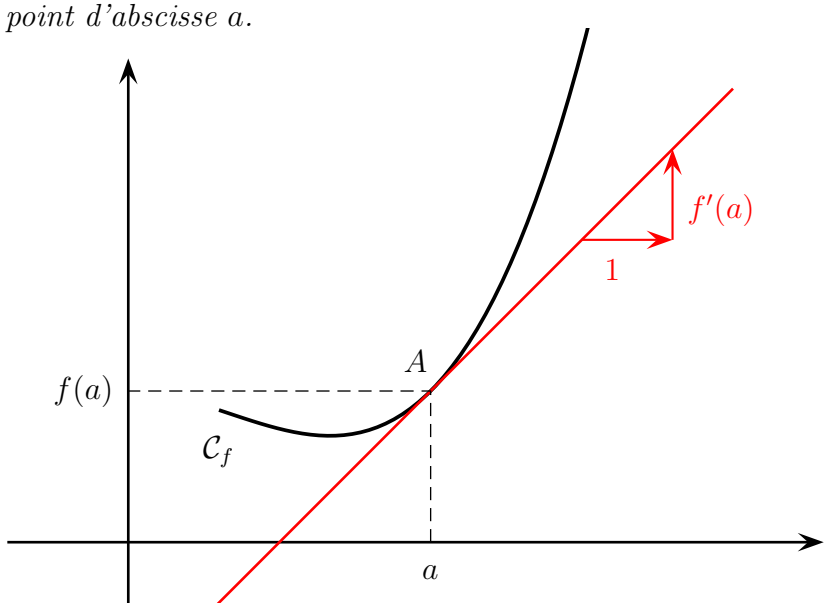
b) Le point extrême de la tribune est le point T.
Un autre pilote perd le contrôle en B. Dessiner sa trajectoire : percute-t-il la tribune ?

c) Entre A et B la courbe du circuit est la courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Le point B a pour abscisse 2 tandis T a pour abscisse $3,5$, (OT) étant l'axe des abscisses.
La tribune sera-t-elle épargnée par le véhicule qui a perdu le contrôle en B.
Nous répondrons à cette question, exactement, plus tard...

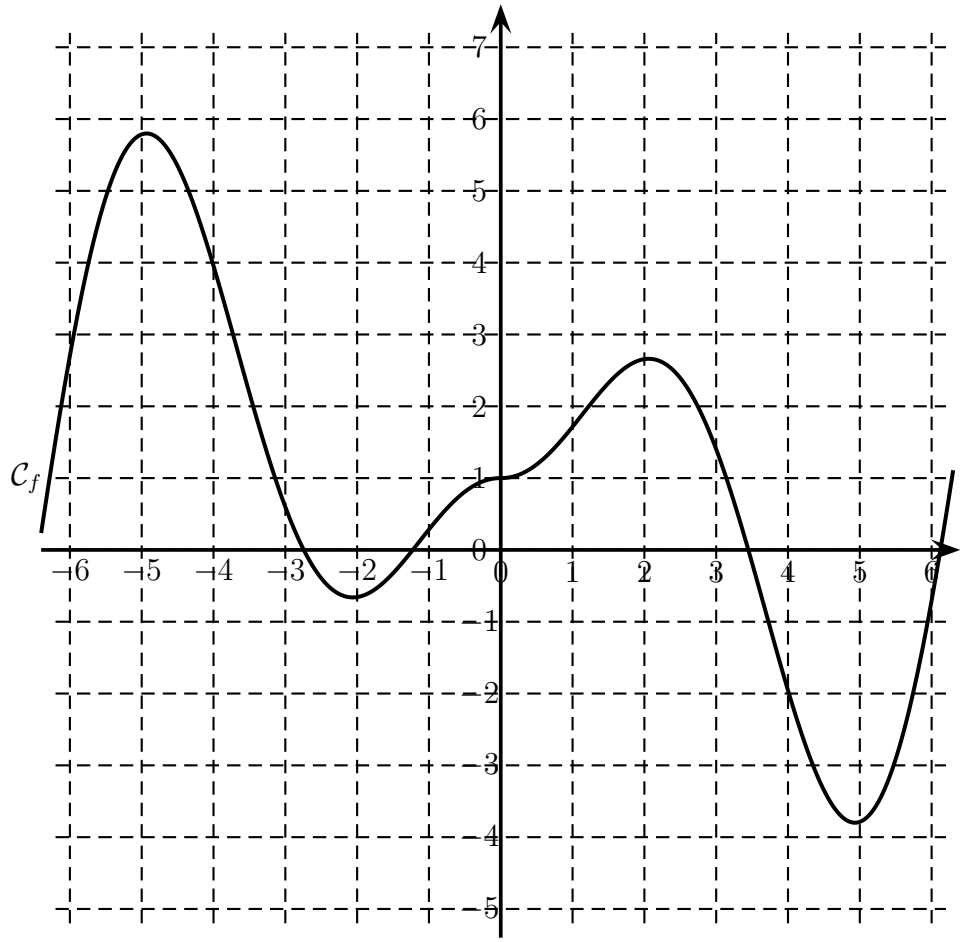


I Tangente et nombre dérivé

Définition: *Le nombre dérivé $f'(a)$, lorsqu'il existe, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.*

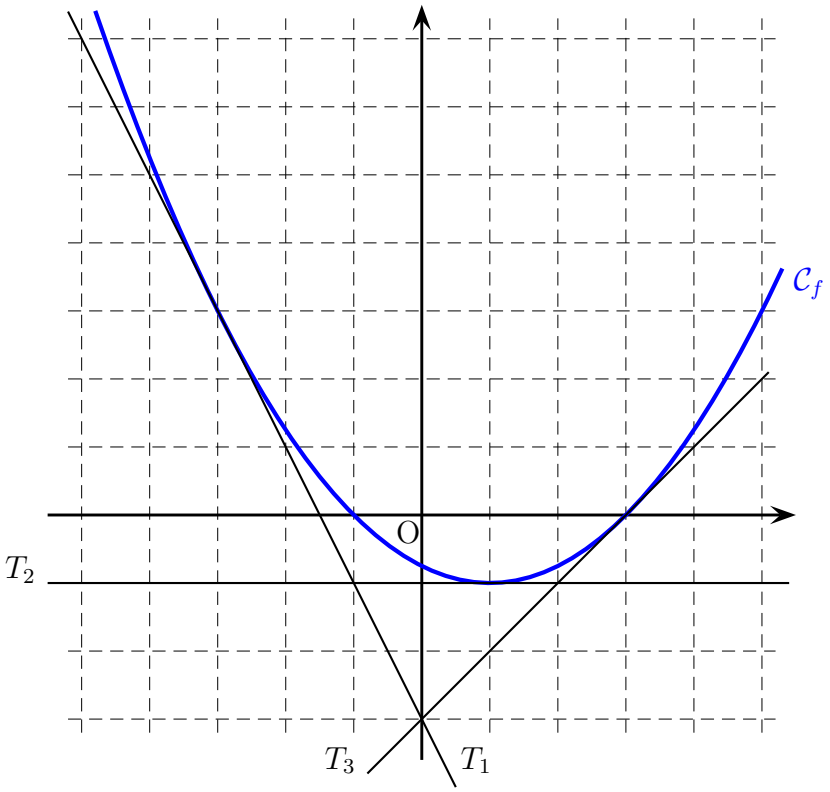


Exercice 2 La courbe $\mathcal{C}_f$, représentative d'une fonction f, est donnée ci-dessous. Dessiner les tangentes à cette courbe aux points d'abscisses -4 ; 0 ; 1 ; 2 et 4.
Donner les valeurs approchées, graphiquement, des nombres dérivés $f'(-4)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(4)$.



Exercice 3 $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f.
T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -3, 1 et 3.

Déterminer graphiquement $f'(-3)$, $f'(1)$ et $f'(3)$, puis les équations de T_1, T_2 et T_3.



II Dérivée et variation des fonctions

Localement, la courbe varie dans le même sens que sa tangente. En particulier, comme une droite est croissante si son coefficient directeur est positif, et décroissante sinon, on a aussi :

Propriété: *Pour une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I,*

- *f est croissante si et seulement si f' est positive*
- *f est décroissante si et seulement si f' est négative*
- *f est constante si et seulement si f' est nulle.*

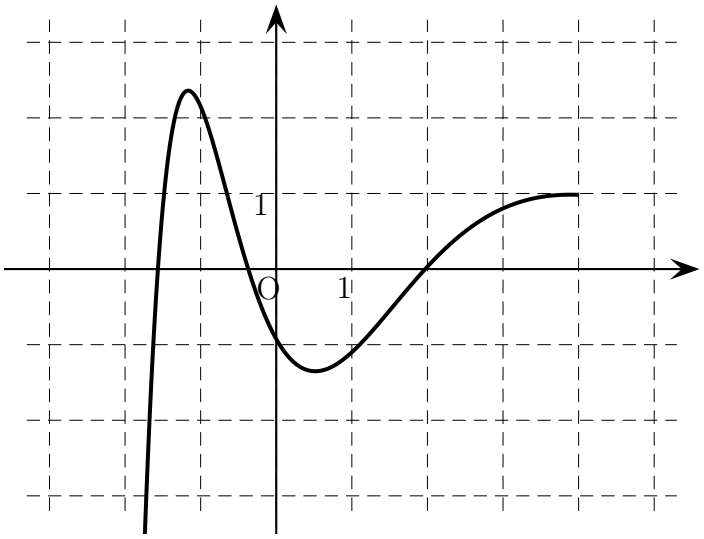
Exercice 4 f est une fonction dérivable dont on connaît le signe de sa fonction dérivée, donné ci-dessous. Complèter le tableau avec les variations de f.

x	-5		2		8		14
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f							

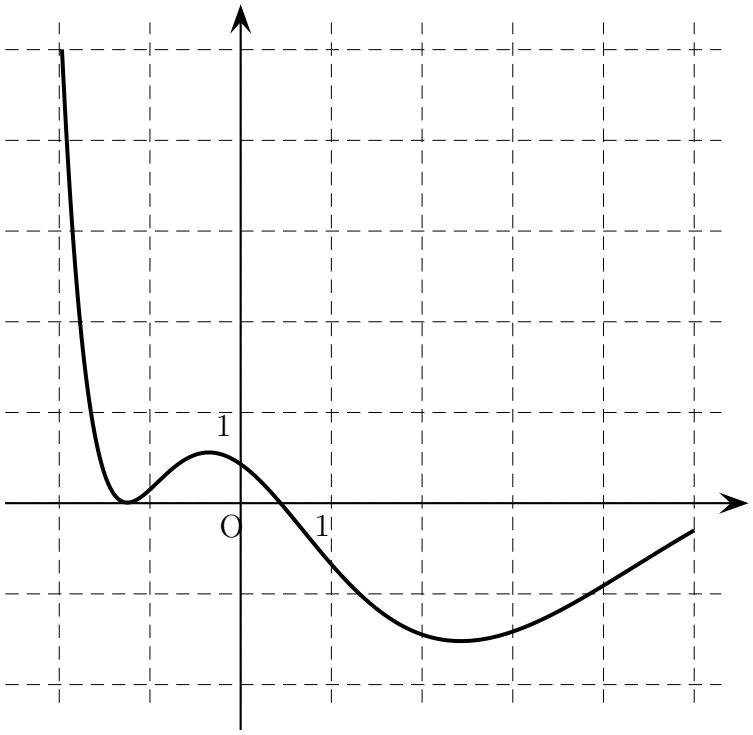
Exercice 5 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x + 2$.
On admet que sa fonction dérivée est $f'(x) = 2x - 4$.
Tracer dans un repère la droite d'équation $y = 2x - 4$.
Complèter alors le tableau de signe de $f'(x)$ et de variations de f. Préciser la valeur du maximum de f.

x	$-\infty$	$\ldots$	$+\infty$
$f'(x) = 2x - 4$		0	
f			

Exercice 6 On cherche les variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-2; 4]$. Sur le graphique suivant la courbe de sa fonction dérivée f' est tracée.
Par lecture graphique, donner le tableau de variation de la fonction f.



Exercice 7 Sur le graphique suivant est représenté la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2;5]$. Donner le tableau de signe de sa fonction dérivée f' ainsi que les variations de f.



Pour pouvoir déterminer les variations d'une fonction f, il reste maintenant à savoir calculer la fonction dérivée f' et à déterminer son signe pour pouvoir étudier des fonctions.

III Calcul de fonctions dérivées

Fonction f	**Dérivée f'**
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

Fonction	**Dérivée**
$u + v$	$u' + v'$
kv	ku'
uv	$u'v + uv'$
u^2	$2u'u$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$

Exemples :

- pour $f(x) = x^2 + 2$, on a $f = u + v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = k$, donc $f' = u' + v'$, et donc $f'(x) = 2x + 0 = 2x$
- pour $f(x) = 3x^2$, on a $f = ku$ avec $k = 3$ et $u(x) = x^2$, donc $f' = ku'$, et donc $f'(x) = 3 \times 2x = 6x$
- pour $f(x) = 3x^2 + x$, on a $f = ku + v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = x$ donc $f' = ku' + v'$ et donc $f'(x) = \ldots\ldots$
- pour $f(x) = -2x^3 + 2x^2$, on a $f = k_1u + k_2v$ avec $u(x) = \ldots$ et $v(x) = \ldots$ et donc $f'(x) = \ldots\ldots$
- pour $f(x) = 6 + 2x^2$, on a $f'(x) = \ldots\ldots$
- pour $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 4x + 2$, on a $f'(x) = \ldots\ldots$
- pour $f(x) = xe^x$ on a $f = uv$ avec $(x) = \ldots$ et $v(x) = \ldots$ donc $f' = \ldots$x
- pour $f(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$ on a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \ldots$ et $v(x) = \ldots$ donc $f' = \ldots$
- pour $f(x) = \ln(2x+1)$ on a $f = \ln(u)$ avec $u(x) = \ldots$ et donc $f' = \ldots$
- pour $f(x) = e^{2x+1}$ on a $f = e^u$ avec $u(x) = \ldots$ et donc $f' = \ldots$
- pour $f(x) = x^2e^{2x+1}$ on a $f = uv$ avec $u(x) = \ldots$ et $v(x) = \ldots$ donc $f' = \ldots$

Exercice 8 Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :a) $f(x) = 4x - 1$ b) $f(x) = -3x^2$

c) $f(x) = -5x^2 + 8x - 127$ d) $f(x) = x^3 + 2x$ e) $f(x) = -2x^3 + 7x^2$ f) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 12x + 1$

g) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 4$, h) $f(x) = 4x^2 - 2 + \dfrac{2}{5}$ i) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$ j) $f(x) = x(x+2) + 3$

k) $f(x) = (x+1)(2x-1)$ l) $f(x) = (x+2)e^x$ m) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$ n) $f(x) = \ln(x^2+3)$

o) $f(x) = e^{-0,1x+2}$ p) $f(x) = xe^{-x}$ q) $f(x) = xe^{x^2-1}$ r) $f(x) = \ln(2x+1) + 10x$ s) $f(x) = 55xe^{-0,4x}$

Exercice 9 Tracer dans un repère la droite d'équation $y = 2x - 1$.
Donner la dérivée de $f(x) = 2x - 1$. Quelle est le sens de variation de f ?

Exercice 10 Tracer dans un repère la droite d'équation $y = -3x + 2$.
Donner la dérivée de $f(x) = -3x + 2$. Quelle est le sens de variation de f ?

Exercice 11 Tracer la droite d'équation $y = 2x - 1$ et donner le tableau de signe de $2x - 1$.
Donner la dérivée puis le tableau de variation de la fonction $f(x) = x^2 - x + 2$.

Exercice 12 Tracer la droite d'équation $y = -3x + 1$ et donner le tableau de signe de $-3x + 2$.
Donner la dérivée puis le tableau de variation de la fonction $f(x) = -\dfrac{3}{2}x^3 + 2x + 2$.

Exercice 13 Donner le tableau de variation de la fonction $f(x) = \ln(2x-1)$

Exercice 14 Donner le tableau de variation de la fonction $f(x) = xe^{-2x}$

Exercice 15 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$.

a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b) Vérifier qu'on a aussi l'expression $f'(x) = (x-1)(3x+1)$.

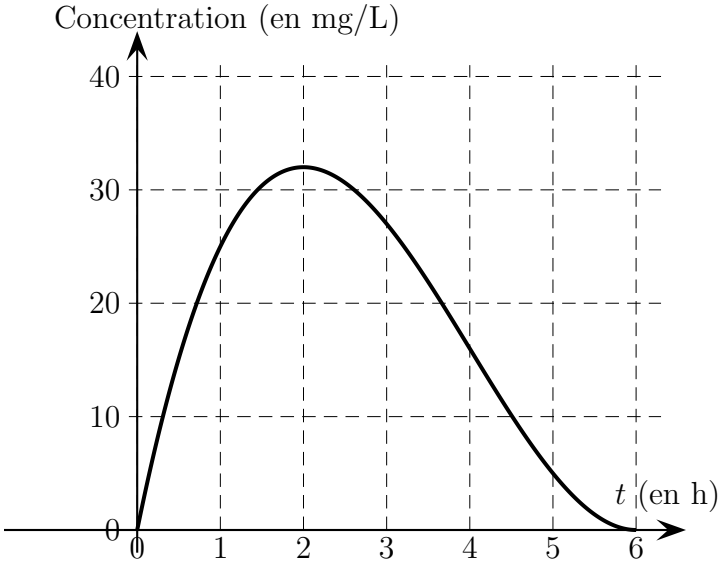
c) Dresser alors le tableau de signe de $f'(x)$ et de variation de f.

Exercice 16 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-6;4]$ par l'expression : $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$.

a) Déterminer $f'(x)$ puis montrer que pour tout x on a $f'(x) = (3x-3)(x+2)$.

b) Donner alors le tableau de signe de $f'(x)$ puis des variations de f.

Exercice 17 Un médicament est administré à un patient. L'évolution de la concentration du produit actif dans le sang (en mg/L) en fonction du temps (en h) est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;6]$ par $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ et représentée par la courbe ci-dessous.



Dans la notice du médicament, il est indiqué : « *au bout de 5h, la concentration dans le sang est inférieure à 20% de sa valeur maximale* ».

a) À l'aide du graphique, vérifier, ou non, si la notice du médicament est respectée.

b) Déterminer la fonction dérivée $f'(t)$ et vérifier que : $f'(t) = (3t-6)(t-6)$.
En déduire le tableau de variation de la fonction f.

c) Préciser alors la valeur exacte du maximum, et confirmer, ou infirmer, les valeurs fournies par la notice.

Exercice 18 Une étude de marché sur les panneaux solaires permet d'estimer que la production mensuelle d'un fabricant devra être comprise entre 1500 et 3000 panneaux solaires.

L'évolution du bénéfice de ce fabricant, en centaine d'euros, généré par la vente de x centaines de panneaux solaires est alors modélisée par la fonction f définie sur $[15; 30]$ par

$$f(x) = -2x^2 + 90x - 400$$

a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
Interpréter ces résultats dans le contexte.

c) Pour quelle production mensuelle le bénéfice est-il maximal ?

Exercice 19 Une entreprise conçoit des composants électroniques. Le coût de production de ces composants est donné, en centaine d'euros, en fonction du nombre x de composants produits par la relation

$$C(x) = 0,01x^2 + 2x + 2,5$$

1. a) Quel est le coût de production de 100 composants ?

   b) Quel est le coût de la fabrication du $101^{\text{ème}}$ composant ?

   c) On appelle **coût marginal** C_m le coût de la production d'une unité supplémentaire produite. On l'exprime par $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$.

   Donner les valeurs des coûts marginaux $C_m(100)$ et $C_m(200)$.

2. Déterminer l'expression de la dérivée $C'(x)$.
   Comparer alors $C_m(100)$ et $C'(100)$, puis $C_m(200)$ et $C'(200)$.
   En économie, on estime le coût marginal $C_m(x)$ par le nombre dérivé $C'(x)$.

Remarque : On définit aussi en économie le prix de vente marginal, ou revenu marginal, $R_m(x)$ pour x unités produites et vendues.
On montre que l'optimum économique, ou le bénéfice maximal, est atteint pour un nombre d'unité x produites et vendues de telle façon que le revenu marginal soit égal au coût marginal : $R_m(x) = C_m(x)$.