Dérivées et variation des fonctions

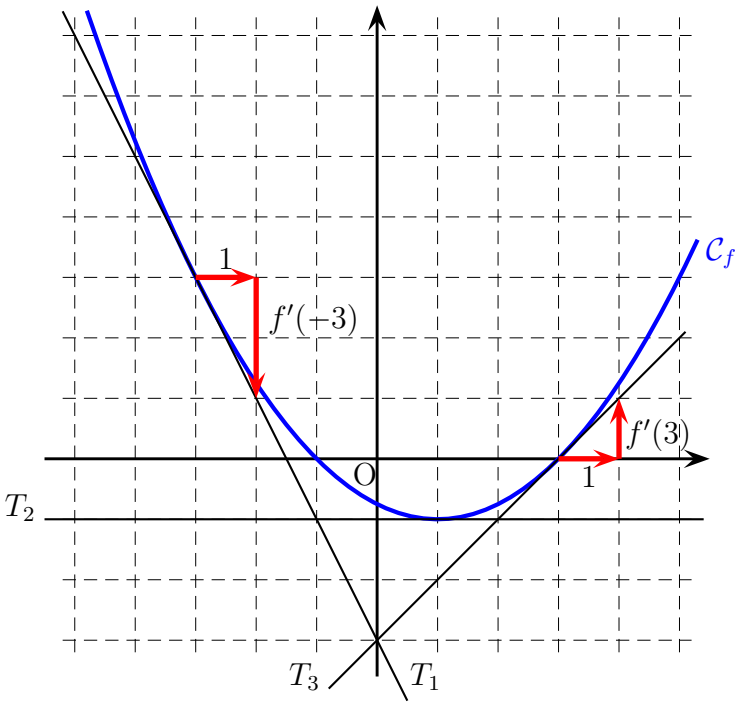
Correction des exercices

Exercice 3 T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -3, 1 et 3.

$f'(-3)$, $f'(1)$ et $f'(3)$ sont les coefficients directeurs des tangentes T_1, T_2 et T_3.
On lit graphiquement que
$f'(-3) = -2$
$f'(1) = 0$ (la tangente T_2 est horizontale)
$f'(3) = 1$

Les équations des droites sont de la forme $y = mx + p$ avec les coefficients directeurs m qu'on vient de déterminer.
Il reste à compléter avec les ordonnées à l'origine :

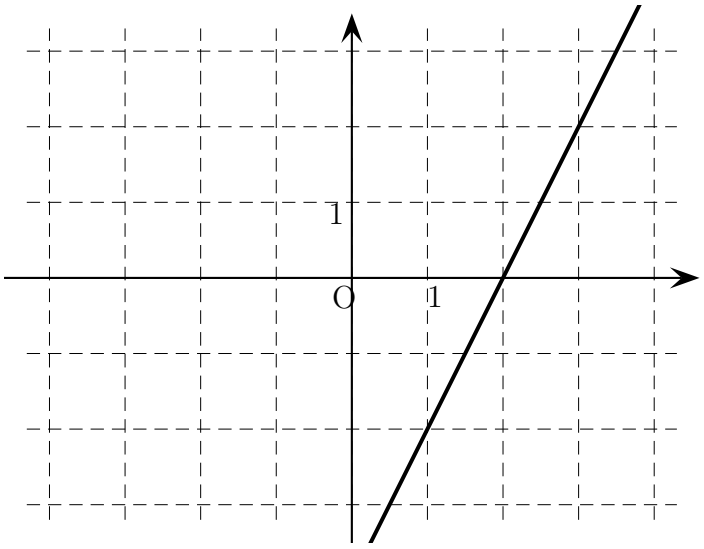
- pour T_1 : $y = -2x - 3$
- pour T_2 : $y = 0x - 1 = -1$
- pour T_3 : $y = 1x - 3 = x - 3$



Exercice 4 f est une fonction dérivable dont on connaît le signe de sa fonction dérivée, donné ci-dessous. Complèter le tableau avec les variations de f.

x	-5		2		8		14
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

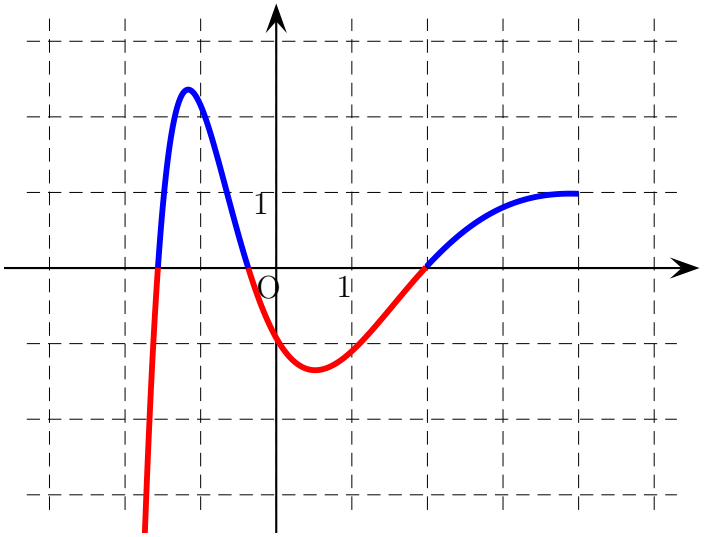
Exercice 5 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x + 2$.
On admet que sa fonction dérivée est $f'(x) = 2x - 4$.
Tracer dans un repère la droite d'équation $y = 2x - 4$.



On complète alors le tableau de signe de $f'(x) = 2x - 4$ et de variations de f.

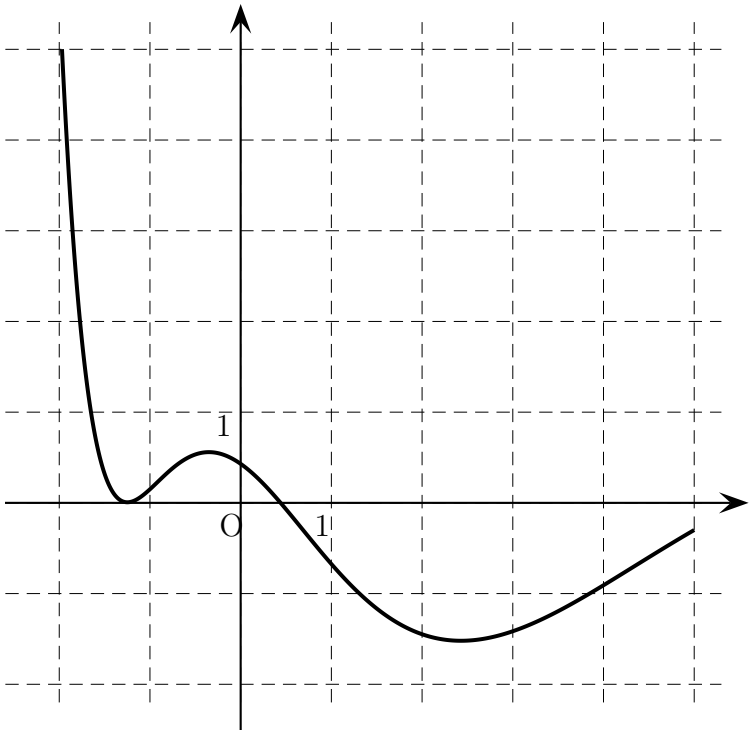
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x) = 2x - 4$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 6 On cherche les variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-2;4]$. Sur le graphique la courbe de la dérivée f' est représentée : en rouge lorsqu'elle est négative et en bleu lorsqu'elle est positive. On complète ensuite les variations de f correspondante.



x	-2		$-1,6$		$-0,3$		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 7 Sur le graphique suivant est représenté la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2;5]$. Donner le tableau de signe de sa fonction dérivée f' ainsi que les variations de f.



x	-2		$-1,2$		$-0,3$		$2{,}3$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	4	↘	0	↗	$0{,}6$	↘	$-1,5$	↗	$-0,2$

Exercice 8 Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x - 1$, $f'(x) = 4$

b) $f(x) = -3x^2$, $f'(x) = -6x$

c) $f(x) = -5x^2 + 8x - 127$, $f'(x) = -10x + 8$

d) $f(x) = x^3 + 2x$, $f'(x) = 3x^2 + 2$

e) $f(x) = -2x^3 + 7x^2$, $f'(x) = -6x + 14x$

f) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 12x + 1$, $f'(x) = x^2 + 12$

g) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 4$, $f'(x) = x^2$

h) $f(x) = 4x^2 - 2 + \dfrac{2}{5}$, $f'(x) = 8x$

i) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$, $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$

j) $f(x) = x(x+2) + 3 = x^2 + 2x + 3$, $f'(x) = 2x + 2$

k) $f(x) = (x+1)(2x-1) = 2x^2 + x - 1$, $f'(x) = 4x + 1$

l) $f(x) = (x+2)e^x$, $f'(x) = (x+3)e^x$

m) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+3)^2}$

n) $f(x) = \ln(x^2+3)$, $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$

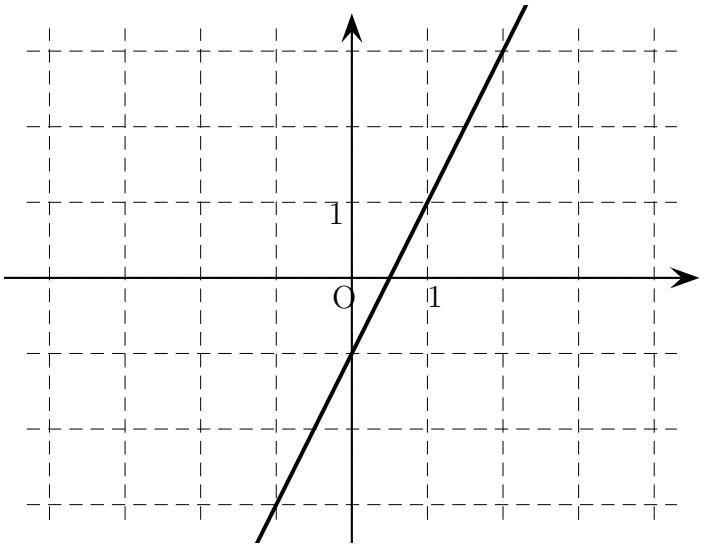
o) $f(x) = xe^{-x}$, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$

p) $f(x) = xe^{x^2-1}$, $f'(x) = (1-2x^2)e^{x^2-1}$

q) $f(x) = \ln(2x+1) + 10x$, $f'(x) = \dfrac{20x+11}{2x+1}$

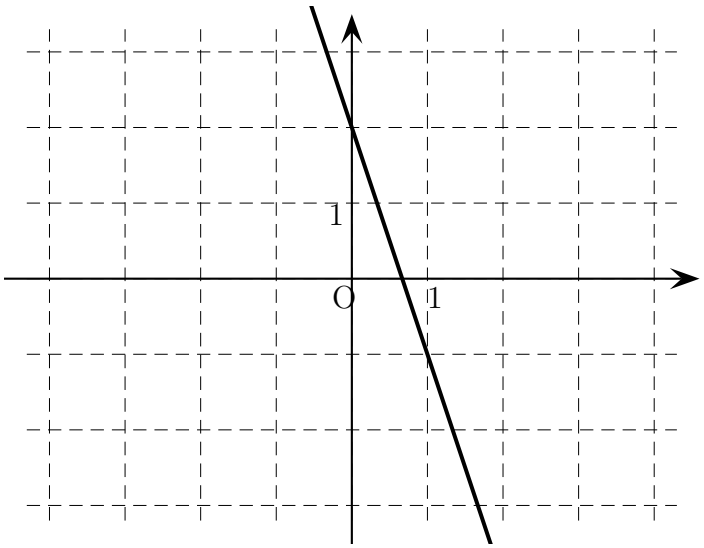
r) $f(x) = 55xe^{-0,4x}$, $f'(x) = 55(1-0,4x)e^{-0,4x}$

Exercice 9 Tracer dans un repère la droite d'équation $y = 2x - 1$.



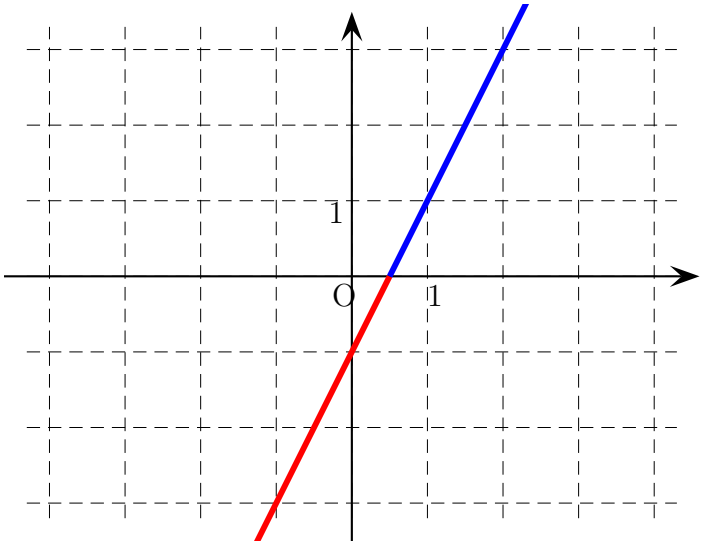
La dérivée de $f(x) = 2x - 1$ est $f'(x) = 2$.
On retrouve que $f'(x) = 2 > 0$ et donc que f est strictement croissante.

Exercice 10 Tracer dans un repère la droite d'équation $y = -3x + 2$.



La dérivée de $f(x) = -3x + 2$ est $f'(x) = -3$.
On retrouve que $f'(x) = -3 < 0$ et donc que f est strictement décroissante.

Exercice 11 Tracer la droite d'équation $y = 2x - 1$ et donner le tableau de signe de $2x - 1$.

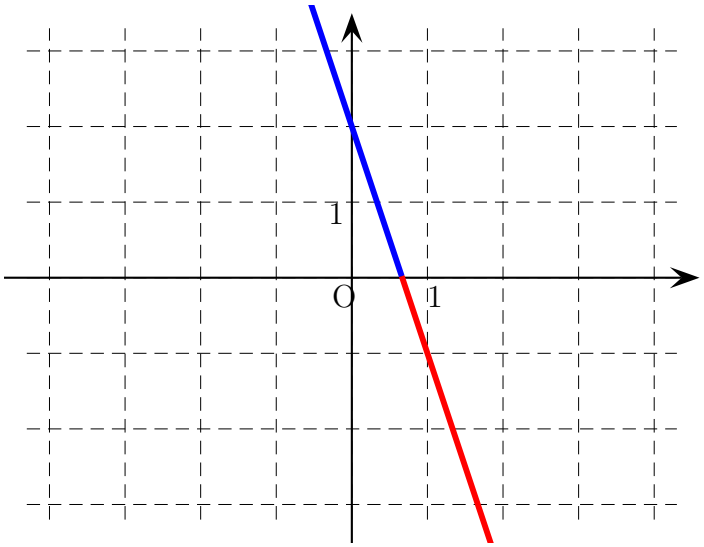


x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$y = 2x - 4$		$-$	0	$+$	

La dérivée de la fonction $f(x) = x^2 - x + 2$ est $f'(x) = 2x - 1$, qu'on vient de tracer et donner le signe. On complète alors avec les variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x) = 2x - 4$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 12 Tracer la droite d'équation $y = -3x + 1$ et donner le tableau de signe de $-3x + 2$.



x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$y = 2x - 4$		$+$	0	$-$	

La dérivée de la fonction $f(x) = -\dfrac{3}{2}x^3 + 2x + 2$ est $f'(x) = -3x + 2$, qu'on vient de tracer et donner le signe.

On complète alors avec les variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x) = -3x + 2$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Exercice 13 La dérivée de la fonction $f(x) = \ln(2x - 1)$ est $f'(x) = \dfrac{2}{2x - 1}$.

Cette fonction est définie pour $2x - 1 > 0$ donc $x > \dfrac{1}{2}$ et on a :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x - 1$		$-$	0	$+$	
$f'(x) = \dfrac{2}{2x - 1}$		$-$	$\|\|$	$+$	
f			$\|\|$	$\nearrow$	

Exercice 14 Donner le tableau de variation de la fonction $f(x) = xe^{-2x}$

On calcule yout d'abord la dérivée du produit $f = uv$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-2x}$.

On trouve $f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$ puis on dresse le tableau de signe et de variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x + 1$		$+$	0	$-$	
e^{-2x}		$+$	$\|$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Exercice 15 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$.

a) La fonction dérivée de f est $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

b) On vérifie en développant $(x - 1)(3x + 1) = 3x^2 + x - 3x - 1 = 3x^2 - 2x - 1 = f'(x)$

c) On dresse alors le tableau de signe de $f'(x)$ en utilisant l'expression factroisée précédente et la règle des signes, puis on complète avec les variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$3x + 1$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 16 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-6;4]$ par l'expression : $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$.

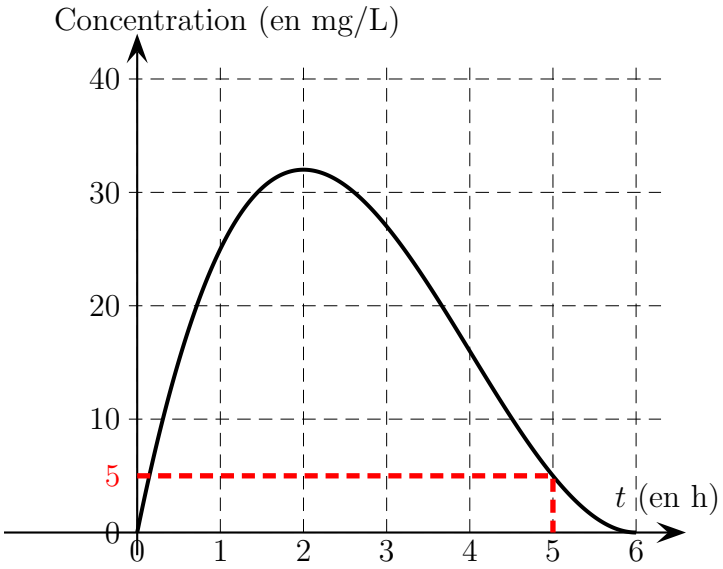
a) On calcule $f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{2} \times 2x - 6 = 3x^2 + 3x - 6$

Par ailleurs, en développant, $(3x-3)(x+2) = 3x^2 + 6x - 3x - 6 = 3x^2 + 3x - 6 = f'(x)$.

b) On dresse alors le tableau de signe de $f'(x)$ en utilisant l'expression factroisée précédente et la règle des signes, puis on complète avec les variations de f :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$3x+3$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 17 Un médicament est administré à un patient. L'évolution de la concentration du produit actif dans le sang (en mg/L) en fonction du temps (en h) est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;6]$ par $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ et représentée par la courbe ci-dessous.



Dans la notice du médicament, il est indiqué : « *au bout de 5h, la concentration dans le sang est inférieure à 20% de sa valeur maximale* ».

a) À l'aide du graphique on trouve qu'au bout de 5h, la concentration dans le sang est d'environ 5mg/L. La valeur maximale de la concentration est d'environ 32mg/L. La notice du médicament est donc respectée puisque $20\%. \times 32 = 6,4$ et $5 < 6,4$.

b) On calcule $f'(t) = 3t^2 - 24t + 36$.

D'autre part, en développant l'expression donnée, $(3t-6)(t-6) = 3t^2 - 18t - 6t + 36 = f'(t)$.

On en déduit le tableau de signes de f' et de variation de f :

t	0		2		6
$3t-6$		$-$	0	$+$	
$t-6$		$-$	$\vert$	$-$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
f	0	$\nearrow$	32	$\searrow$	0

c) La valeur exacte du maximum est donc $f(2) = 32$, et on confirme alors les valeurs fournies par la notice car $f(5) = 5$ et on retrouve les valeurs graphiques du a).

Exercice 18 Une étude de marché sur les panneaux solaires permet d'estimer que la production mensuelle d'un fabricant devra être comprise entre 1500 et 3000 panneaux solaires.

L'évolution du bénéfice de ce fabricant, en centaine d'euros, généré par la vente de x centaines de panneaux solaires est alors modélisée par la fonction f définie sur $[15; 30]$ par

$$f(x) = -2x^2 + 90x - 400$$

a) On calcule $f'(x) = -4x + 90$

b)

t	0		22,5		30
$f'(x) = -4x + 90$		$+$	0	$-$	0
f	-400	$\nearrow$	612,5	$\searrow$	500

Le bénéfice du fabricant augmente avec les ventes jusqu'à 2250 panneaux solaires vendus. Ensuite, pour plus de 2250 panneaux vendus les bénéfices diminuent.

c) Le bénéfice est maximal pour une production mensuelle de 2250 panneaux solaires.

Exercice 19 Une entreprise conçoit des composants électroniques. Le coût de production de ces composants est donné, en centaine d'euros, en fonction du nombre q de composants produits par la relation

$$C(x) = 0,01x^2 + 2x + 2,5$$

1. a) Pour $x = 100$ composants, le coût de production est $C(100) = 0,01 \times 100^2 + 2 \times 100 + 2,5 = 302,5$

   b) Le coût de la fabrication du 101ème composant est le coût de production de 101 composants moints le coût des 100 composants précédents, soit $C(101) - C(100)$.
   On calcule $C(101) = 0,01 \times 101^2 + 2 \times 101 + 2,5 = 306,51$ et, avec le résultat de la question précédente, on trouve le coût du 101ème composant

   $$C(101) - C(100) = 4,01$$

   c) On calcule

   $$C_m(100) = C(101) - C(100) = 4,01$$

   qui est le coût du 101ème composant calculé dans la question précédente, et

   $$C_m(200) = C(201) - C(200) = 808,51 - 802,5 = 6,01$$

2. $C'(x) = 0,01 \times 2x + 2 + 0 = 0,02x + 2$
   On a alors $C'(100) = 4 \simeq C_m(100) = 4,01$
   et $C'(200) = 6 \simeq C_m(100) = 6,01$