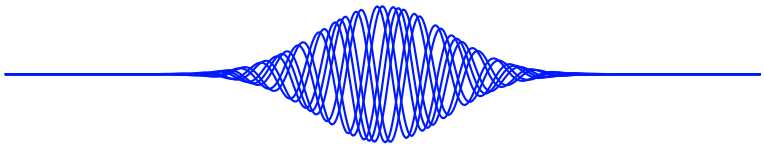
# Systèmes de numération

BTS SIO



## Table des matières


I Système naturel décimal . . . . . 2

II Système binaire . . . . . 2

1 Écriture en base 2 . . . . . 2

2 Conversion : décimal en binaire . . . . . 3

3 Écriture binaire des nombres réels . . . . . 4

4 Opération élémentaires . . . . . 6

4.1 Additions . . . . . 6

4.2 Soustractions . . . . . 6

4.3 Muliplications . . . . . 6

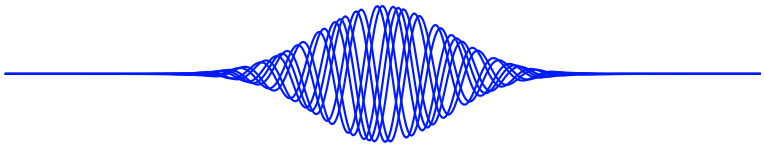
III Écriture hexadécimale des nombres . . . . . 7

1 Hexadécimal ou base 16 . . . . . 7

2 Conversion décimal / hexadécimal . . . . . 7

3 Conversion hexadécimal / binaire . . . . . 8

IV Annexe : nombres négatifs et complément à 2 en binaire . . . . . 9

# I Système naturel décimal

Nous comptons et écrivant les nombres « naturellement »en base 10. Cette écriture utilise, seulement !, 10 chiffres : 0, 1, 2, . . ., 9

Il s'agit d'une numération de position dans laquelle la valeur de chaque chiffre dépend de sa position dans le nombre écrit. Par exemple le chiffre 4 dans le nombre 42 n'a pas la même valeur que dans le nombre 4 237.

L'écriture décimale permet d'écrire les nombres avec le nombre de base 10, et ses puissances, par exemple

- $\begin{aligned} 42 &= 40 + 2 \\ &= 4 \times 10 + 2 \\ &= 4 \times 10^1 + 2 \times 10^0 \end{aligned}$

- $\begin{aligned} 4\,237 &= 4\,000 + 200 + 30 + 7 \\ &= 4 \times 1000 \times 10 + 2 \times 100 + 3 \times 10 + 7 \\ &= 4 \times 10^3 \times 10 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \end{aligned}$

# II Système binaire

## 1 Écriture en base 2

Avec le système décimal, ou en base 10, on utilise 10 chiffres (ou 10 symboles) pour exprimer tout nombre. On pourrait se contenter de n'en utiliser que 2, le 0 et le 1. C'est le système de numération binaire ou numération en base 2.

On utilise donc le nomrbe 2 comme base, au lieu de 10 et par exemple,

- $(10)_2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2$

- $\begin{aligned} (1010)_2 &= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \\ &= 8 + 0 + 2 + 0 \\ &= 10 \end{aligned}$

Plus rigoureusement, on note $(10)_2 = (2)_{10}$ et $(1010)_2 = (10)_{10}$

**Exercice** 1 Donner l'écriture décimale, ou en base 10, de : $a = (101)_2$ ; $b = (1000)_2$ et $c = (10101)_2$

**Exercice** 2 Compléter les tableaux

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n$ | | | | | | | | | | | | | | | | |

| Base 10 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Base 2 | 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |

## 2 Conversion : décimal en binaire

La conversion d'une écriture binaire en décimale est facile, il s'agit de la définition directement de la représentation positionnelle avec la base 2.

$$(101)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 4 + 0 + 1 = 5 = (5)_{10}$$

Dans l'autre sens, on peut utiliser deux méthodes. Par exemple avec le nombre 85.

### Méthode 1 : soustractions successives

On cherche la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale au nombre en base 10.
On a $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$, donc on a le début de l'écriture binaire :

$$85 = 1 \times 2^6 + \text{reste}$$

où on calcule facilement le reste : $85 - 2^5 = 21$, donc

$$85 = 1 \times 2^6 + 21$$

On recommence avec ce reste 21 et la plus grande puissance de 2 qui lui est inférieure, $2^4 = 16$ et $2^5 = 32$ :

$$21 = 2^4 + \text{reste} = 2^4 + 5$$

et on recommence avec ce nouveau reste,

$$5 = 2^2 + 1 = 2^3 + 2^0$$

On rassemble alors tout ceci :

$$\begin{aligned} 85 &= 2^6 + 21 \\ &= 2^6 + 2^4 + 5 \\ &= 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0 \end{aligned}$$

On complète avec des zéros pour les puissances manquantes :

$$\begin{aligned} 85 &= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= \left( 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \right)_2 \\ &= (1010101)_2 \end{aligned}$$

### Méthode 2 : divisions euclidiennes successives

**Rappel : division euclidienne** pour poser la division de 34 par 4

$$\begin{array}{r|l} 35 & 4 \\ \cline{2-2} -32 & 8 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

ce qui signifie que $35 = 4 \times 8 + 3$.
Dans ce calcul,

- $a = 35$ est le **dividende**
- $b = 4$ est le **diviseur**
- $q = 8$ est le **quotient**
- $r = 3$ est le **reste**, avec $0 \leqslant r < q$

Cette opération s'appelle la **division euclidienne de $a$ par $b$** :
Autre exemple :

$$\begin{array}{r|l} 527 & 4 \\ \hline 4 & 131 \\ \hline 12 & \\ 12 & \\ \hline 07 & \\ 4 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

et on a donc $527 = 4 \times 131 + 3$.

**Exercice 3** Poser la division de : a) 92 par 4 b) 725 par 3 c) 531 par 2 d) 15207 par 7

Pour convertir l'écriture d'un nombre de la base 10 à la base 2, on divise en fait ce nombre par 2, puis encore par 2, ...

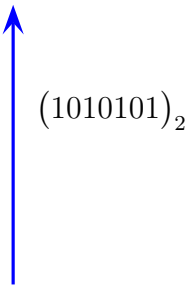
$$\begin{array}{r|l} 85 & 2 \\ \hline 1 & 42 \end{array} \text{ puis } \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ \hline 0 & 21 \end{array} \text{ puis } \begin{array}{r|l} 21 & 2 \\ \hline 1 & 10 \end{array} \text{ puis } \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \hline 0 & 5 \end{array} \text{ puis } \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \text{ puis } \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \text{ puis } \begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 \end{array}$$

et on trouve la conversion en lisant la suite des restes en partant du dernier :

$$(85)_{10} = (1010101)_2$$

Une autre présentation de ces calculs :

| Quotient | reste |
|---|---|
| 85 | |
| 42 | 1 |
| 21 | 0 |
| 10 | 1 |
| 5 | 0 |
| 2 | 1 |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |




**Exercice 4** Convertir en binaire les nombres : $a = 12$, $b = 110$, $c = 133$, $d = 397$ et $e = 7\,231$

## 3 Écriture binaire des nombres réels

Nous n'avons écrit jusque là que des nombres entiers en base 10 ou 2.
Plus généralement, pour la partie décimale des nombres réels on utilise des puissances négatives.
Par exemple,

$$\begin{array}{rcccc} 13,25 & = & 13 & + & 0,25 \\ & = & 1 \times 10^1 + 3 \times 10^0 & + & 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} \end{array}$$

et en base 2, comme $0,25 = \dfrac{1}{4} = 2^{-2}$

$$\begin{array}{rcccc} 13,25 & = & 13 & + & 0,25 \\ & = & 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^{-2} & & \\ & = & (1110,01)_2 & & \end{array}$$

Pour écrire la partie décimale on utilise donc les puissances négatives de 2 :

| $n$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^n$ | $\frac{1}{2}=0,5$ | $\frac{1}{4}=0,25$ | $\frac{1}{8}=0,125$ | $\frac{1}{16}=0,0625$ | $\frac{1}{32}=0,03125$ |

On note de plus, dans toutes les bases, avec un signe moins les nombres négatifs.
Par exemple $(13)_{10}=(1101)_2$ et $(-13)_{10}=(-1101)_2$.

Pour calculer l'écriture binaire d'un nombre décimal on utilise des divisions successives par 2 pour sa partie entière et des multiplications successives par 2 pour sa partie décimale, par exemple

$$a=20,75=20+0,75$$

On a pour la partie entière $20=16+4=2^4+2^2=(10100)_2$ et pour la partie décimale :
$0,75\times 2=1,5$ donc $0,75=\dfrac{1,5}{2}=1,5\times 2^{-1}=1\times 2^{-1}+0,5\times 2^{-1}$
$0,5\times 2=1$ donc $0,5=2^{-1}$
On récapitule, $0,75=2^{-1}+0,5\times 2^{-1}=2^{-1}+2^{-2}=0,11_2$
et ainsi,

$$20,75=10100,11_2$$

| Multiplication par 2 | Partie entière | reste |
|---|---|---|
| 0,75 | | |
| $0,75\times 2=1,5$ | 1 | 0,5 |
| $0,5\times 2=1$ | 1 | 0 |

$\downarrow (0,11)_2$

Autre exemple, convertir $3,6875$ en binaire.
On a $3,6875=3+0,6875$ avec facilement $3=2+1=2^1+2^0=11_2$ et pour la partie décimale

| Multiplication par 2 | Partie entière | reste |
|---|---|---|
| 0,6875 | | |
| $0,6875\times 2=1,375$ | 1 | 0,375 |
| $0,375\times 2=0,75$ | 0 | 0,75 |
| $0,755\times 2=1,5$ | 1 | 0,5 |
| $0,5\times 2=1$ | 1 | 0 |

$\downarrow (0,1011)_2$

et donc, on récapitule

$$3,6875=11,1011_2$$

**Exercice 5** Convertir en binaire les nombres : $a=15,75$, $b=5,625$, $c=2,3125$ et $d=1,2$

Dans ce dernier cas $d=1,2$, simple en apparence !, on trouve que la partie décimale binaire est infinie et périodique : il n'est pas possible de coder en binaire et en un nombre fini de bit ce simple nombre 1,2.
Si on veut utiliser ce nombre sur une machine qui utilise un codage en binaire (beaucoup de langages informatiques !) ce nombre sera arrondi, par exemple :
— avec 4 bits pour la partie décimale, $1,2\simeq 1,0011_2$
et $0,0011_2=2^{-3}+2^{-4}=0,1875\simeq 2$
— avec 8 bits pour la partie décimale, $1,2\simeq 1,00110011_2$
et $0,00110011_2=2^{-3}+2^{-4}+2^{-7}+2^{-8}=0,1992\simeq 2$
Attention donc aux approximations incontournables et cachées dans les calculs effectués en binaire sur une machine

**Règle d'arrondi** On arrondi en général de la manière suivante : on tronquie simplement si le premier symbole abondonné est 0, et on ajoute 1 au dernier symbole conservé sinon.

**Exercice** 6 Écrire en binaire en utilisant 4 bits pour la partie décimale : $a = 0,42$ et $b = 2,65$

# 4 Opération élémentaires

## 4.1 Additions

**En base 10**

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\phantom{00}} \\ 1\ 7\ 6 \\ +\ 2\ 4\ 2 \\ \hline 4\ 1\ 8 \end{array}$$

**et en base 2** L'addition se mène de la même façon, en utilisant seulement de plus que 1+1=10 :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\phantom{00}} \\ 1\ 1\ 0 \\ +\ \ 1\ 1 \\ \hline 10\ 0\ 1 \end{array} \qquad \text{soit} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ +3 \\ \hline 9 \end{array}$$

**Exercice** 7 Calculer les additions suivantes :
a) 101+110 b) 1010+11 c) 10 11 01+1 00 10 d) 1 00 11+1 10 11

## 4.2 Soustractions

**En base 10**

$$\begin{array}{r} 2\ {\scriptstyle 1}3\ 6 \\ -\ {\scriptstyle 1}1\ 4\ 2 \\ \hline 0\ 9\ 4 \end{array}$$

**et en base 2**

$$\begin{array}{r} 1\ {\scriptstyle 1}0\ 1\ 1 \\ -\ {\scriptstyle 1}\ 1\ 1\ 0 \\ \hline 0\ 1\ 0\ 1 \end{array} \qquad \text{soit} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ -\ 6 \\ \hline 5 \end{array}$$

## 4.3 Muliplications

Comme pour la multiplication en écriture décimale, par exemple $9 \times 5 = 1001_2 \times 101_2$

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1 \\ \times\ \ \ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ . \\ 1\ 0\ 0\ 1\ .\ . \\ \hline 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \end{array}$$

soit donc $101101_2 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 45$

**Exercice** 8 Effectuer les multiplications suivantes :
$a = 1010 \times 11$, $b = 1\,1011 \times 1101$, $c = 10\,1101 \times 1010$, $d = 101 \times 01\,1011$ et $e = 1011 \times 10$

On remarque les multiplications très simples particulières :
— en base 10, multiplier par 10 revient à ajouter un zéro à droite
— en base 2, multiplier par 2 revient de même à ajouter un zéro à droite, or $2 = 10_2$ ...
— de même pour les multiplications par des puissances de 10 ou de 2...
Par exemple, $123 \times 10 = 1230$ et la multiplication par 2 en binaire : $101_2 \times 10_2 = 1010$

# III Écriture hexadécimale des nombres

## 1 Hexadécimal ou base 16

On connaît maintenant l'écriture des nombres en base 2 et 10. L'écriture hexadécimale est similaire en reposant sur la base 16.

Il faut 2 symboles en binaires (0 et 1), 10 en décimal (0,1, ..., 9) et donc 16 en hexadécimal : on complète nos 10 chiffres par les premières lettres de l'alphabet : A, B, C, D E et F :

| Décimal | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hexadécimal : | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F |
| Binaire : | 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 110 | 111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |

On utilise alors la base 16 comme on a utilisé la base 2 ou 10, par exemple

$$\begin{aligned}(2E)_{16} &= 2 \times 16^1 + 14 \times 16^0 \\ &= 2 \times 16 + 14 \times 1 \\ &= 46\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}(A3B)_{16} &= 10 \times 16^2 + 3 \times 16^1 + 11 \times 16^0 \\ &= 10 \times 256 + 3 \times 16 + 11 \\ &= 2560 + 48 + 11 \\ &= 2619\end{aligned}$$

et

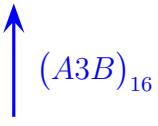
$$(10)_{16} = 16$$

## 2 Conversion décimal / hexadécimal

Pour convertir d'hexadécimal en décimal on calcule comme précédemment en utilisant la définition de l'écriture sur une base.

La conversion dans l'autre sens se fait comme en binaire par division euclidiennes successives, par exemple pour écrire le nombre décimal 2619 :

| Quotient par 16 | reste |
|---|---|
| 2619 | |
| 163 | 11 |
| 10 | 3 |
| 0 | 10 |




### Exercice 9

a) Convertir en hexadécimal les nombres :
$a = 219$, $b = 3167$, $c = 656$ et $d = 7231$

b) Convertir en décimal les nombres suivants, écrits en numération hexadécimal :
$e = C20$, $f = A2E$, $g = 3AE$, $h = FFF$, $i = 6AF$, $j = 231$

## 3 Conversion hexadécimal / binaire

Comme $16 = 2^4$ les conversions sont facilitées en découpant par blocs de 4 bits, par exemple

$$(A3B)_{16} = \big( \overbrace{1010}^{A} \ \overbrace{0011}^{3} \ \overbrace{1011}^{B} \big)_2$$

### Exercice 10

a) Convertir en binaire les nombres hexadécimaux suivants :
$a = AEB$, $b = FF$, $c = 7C6$, $d = 8E05$, $e = ABCD$, $f = 11$

b) Convertir en hexadécimal les nombres binaires :
$g = 1111\,1111$, $h = 1\,1111$, $i = 11\,0001$, $j = 10$, $k = 110$, $l = 1110\,0101\,1001$

# IV Annexe : nombres négatifs et complément à 2 en binaire

On note simplement dans ce cours les nombres négatifs précédés sur signe moins, par exemple $5 = 101_2$ et $-5 = -101_2$.

L'écriture binaire est essentiellement utilisées pour coder des nombres sur une machine. Un codage naïf de ces nombres, par exemple sur 4 bits, est d'uilider le 1er bit pour coder le signe : $\underline{0}101_2 = 5$ et $\underline{1}101_2 = -5$.

Le problème majeur de ce codage est que les règles élémentaires de calcul ne sont pas alors corectes. Par exemple $5 = 0101_2$ et $-3 = 1011_2$ et $5 + (-3) = 0101 + 1011 = 1000_2 = -0\ldots$

**Codage en complément à 2.** Le codage en binaire en complément à 2 permet de palier cet inconvénient ;

- les nombres positifs sont codés comme précédemment : $5 = 0101_2$
- pour les nombres négatifs, en deux étapes, par exemple pour $-3 = -0011$
  - on écrit le complément à 1, ou inversion binaire, 1100
  - on ajoute 1 : 1101

Le premier bit est forcément changé et indique toujours rapidement le signe du nombre codé.

On obtient alors $5 + (-3) = 0101 + 1101 = 10010_2$ soit en restant sur 4 bits $0010_2 = 2$ et l'addition est bien respectée.

On peut utiliser cette méthode pour soustraire des nombres binaires car $a - b = a + (-b)$ : on écrit le complément à 2 du nombre à soustraire sur le même nombre de bits que le 1er nombre, puis on l'additionne au 1er. On ignore les éventuels débordement vers la gauche des $n$ bits.

Par exemple pour le calcul de $11 - 7$ :

- $11 = 1011_2$
- $7 = 0111$ donc complément à 2 (complément à 1 plus 1) : $1000 + 1 = 1001$
- On additionne : $1011 + 1001 = \underline{10100}$ et, sans le débordement on obtient $0100_2 = 4$

## Exercice 11

a) Écrire le complément à 2 de : $a = 1010$, $b = 0110$ et $c = 101101$

b) Calculer les soustractions de deux façons, directement et en utilisant le complément à deux :

a) $1010 - 0110$ b) $10\,10\,01 - 01\,01\,00$ c) $11\,01\,10 - 101$

Remarques :

- Sur 4 bits on écrit $-3 = -0011_2$ dont le complémentà 2 est $1101_2 = 13$ soit aussi $2^4 - 3$ : il s'agit du complément à $2^4$.
  Le nom complet de la méthode est « complément à 2 puissance n », presque toujours abrégé en « complément à 2 ».
- La méthode du complément s'utilise dans d'autres bases, par exemple en base 10, codé avec 4 chiffres : 3 se code 0003 et donc $-3$, en complément à 10 (complément à 9 plus 1), $9996 + 1 = 9997$
  et on a alors

$$12 - 3 = \begin{array}{cccccc} & & 0 & 0 & 1 & 2 \\ & + & 9 & 9 & 9 & 7 \\ \hline 1 & & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}$$