Arithmétique

BTS SIO

Exercice 1

a) Donner tous les diviseurs de 12.

b) Donner tous les diviseurs de 30.

c) Combien de multiples de 8 existe-t-il entre 1000 et 2000 ?

Exercice 2 Écrire la division euclidienne de 99 par 5, de 1076 par 10, de 111 par 37, de 14523 par 23.

Exercice 3 On considère les nombres $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 111$, ..., $x_8 = 11\,111\,111$.

a) Trouver deux nombres parmi ces huit nombres qui ont le même reste dans la division euclidienne par 7.

b) Justifier que la différence des deux nombres trouvés, $x_p - x_q$, est un multiple de 7.

c) En déduire l'existence d'un multiple de 7 qui ne s'écrit qu'avec des 0 et des 1.

Exercice 4

a) 15 a pour diviseurs ..... 6 a pour diviseurs ..... donc $pgcd(6, 15) = \ldots$

b) 35 a pour diviseurs ..... 7 a pour diviseurs ..... donc $pgcd(6, 15) = \ldots$

c) 121 a pour diviseurs ..... 16 a pour diviseurs ..... donc $pgcd(6, 15) = \ldots$

Exercice 5 En appliquant l'algorithme des différences, déterminer le *pgcd* de :
1) $a = 123$ et $b = 21$ 2) $a = 516$ et $b = 156$ 3) $a = 580$ et $b = 348$ 4) $a = 296$ et $b = 703$

Exercice 6 En appliquant l'algorithme d'Euclide, déterminer le *pgcd* de :
1) $a = 123$ et $b = 21$ 2) $a = 516$ et $b = 156$ 3) $a = 580$ et $b = 348$ 4) $a = 296$ et $b = 703$

Exercice 7

a) Une feuille A4 a pour dimensions 21cm et 29,7cm. Alice veur quadriller sa feuille à l'aide de carrés de mêmes dimensions et qui soient les plus gros possibles.
Quelle est la taille de ces carrés ? combien en faut-il ?

b) Un boulanger fait des pizzas sur des plaques de 140×168cm. Il veut découper ses pizzas en parts carrées, les plus grands possibles, sans faire de perte. Quelles doivent être les dimensions de ces carrés ?

Exercice 8 Déterminer si les nombres suivants sont premiers : 247, 337, 353, 613, 893

Exercice 9 Écrire un algorithme / programme Python, qui affiche si un nombre n donné est premier.

Exercice 10 Donner la décomposition en facteurs premiers de : 360, 125, 48, 242, 165

Exercice 11 Mme Anomeny discute avec son facteur et lui dit :
« J'ai trois filles ; le produit de leurs âges fait 36. »
Le facteur lui répond que cela ne lui suffit pas pour connaître l'âge des trois filles.
Mme Anomeny ajoute alors : « La somme de leurs âges donne le numéro de la maison d'en face. »
Le facteur se retourne et regarde le numéro de la maison d'en face et dit : « cela ne me suffit toujours pas pour connaître leurs âges ! »
Mme Anomeny ajoute alors : « En effet, j'ai oublié de vous dire que l'ainée est blonde »
Le facteur sourit alors et donne l'âge des trois filles.
Quels âges ont les 3 filles ?

Exercice 12 Déterminer le *pgcd* de a et b en les décomposant en produits de facteurs premiers :
1) $a = 130$ et $b = 85$ 2) $a = 96$ et $b = 728$

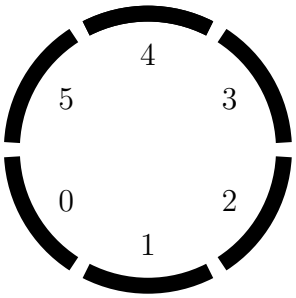
Exercice 13 Compléter, avec le plus petit entier possible,

$15 \equiv \ldots\ [2]$ $20 \equiv \ldots\ [2]$ $147 \equiv \ldots\ [2]$ $9 \equiv \ldots\ [12]$ $132 \equiv \ldots\ [10]$

$1634 \equiv \ldots\ [10]$ $17 \equiv \ldots\ [7]$ $28 \equiv \ldots\ [7]$ $155 \equiv \ldots\ [7]$ $623 \equiv \ldots\ [3]$

A quelle condition a-t-on $p \equiv 0\ [n]$?

Exercice 14 Une puce se trouve initialement sur la case 0 d'un plateau circulaire de 6 cases.



a) Suposons que la puce saute par saut de 2 cases. Quelles sont les cases sur lesquelles elle va se poser ?
b) Si elle fait maintenant des sauts de 3 cases, quelles sont les cases sur lesquelles elle va se poser ?
c) Si elle fait maintenant des sauts de 8 cases, quelles sont les cases sur lesquelles elle va se poser ?
d) Et avec des sauts de 5 cases, quelles sont les cases sur lesquelles elle va se poser ?
e) Peut-elle passer par toutes les cases autrement qu'avec des sauts de 1 case ?

Remarque : le parcours du plateau de jeu, ou d'une liste, n'est exhaustif que si la longueur du saut et la taille de la liste sont premiers entre eux.

Exercice 15 Compléter avec l'entier nautrel le plus petit possible :

$90 \equiv \ldots\ [7]$ $66 \equiv \ldots\ [7]$

$90 + 66 \equiv \ldots\ [7]$ $8 \times 90 \equiv \ldots\ [7]$ $90 \times 66 \equiv \ldots\ [7]$ $90^2 \equiv \ldots\ [7]$

$66^3 \equiv \ldots\ [7]$ $66^4 \equiv \ldots\ [7]$ $66^5 \equiv \ldots\ [7]$ $66^{15} \equiv \ldots\ [7]$

Exercice 16

a) Quel est le chiffre des unités de 8532^{12} ?
b) Quel est le chiffre des unités de $78\,253^{20}$?

Exercice 17 Chiffrement affine

On utilise, pour simplifier ici, un alphabet de seulement 6 lettres qu'on numérote de 0 à 5.

Une méthode de chiffrement affine repose sur une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ avec a et b des entiers naturels. Le couple (a, b) est la clé secrète de chiffrage.

Pour coder une lettre de l'alphabet, on prend l'image de son code par f, puis le reste dans la division euclidienne par 6. On remplace alors la lettre initiale par celle qui correspond à ce reste obtenu.

Quand $a = 1$ et $b = 3$, il s'agit d'un simple décalage de 3 lettres : c'est le code qu'utilisait César.

1) On utilise la clé de chiffrage $(7, 3)$. Compléter

Lettre initiale	A	B	C	D	E	F
Code	0	1	2	3	4	5
Code chiffré						
Lettre chiffrée						

Décoder le mot chiffré : « FDCB »

2) Écrire les chiffrements de l'alphabet obtenus avec les clés $(2, 3)$, $(4, 2)$ et $(9, 1)$ dans le tableau suivant :

Alphabet	A	B	C	D	E	F
Code	0	1	2	3	4	5
Chiffrage clé $(2, 3)$						
Chiffrage clé $(4, 2)$						
Chiffrage clé $(9, 1)$						

Ces chiffrages sont-ils satisfaisants ?

Énoncer un critère sur le nombre a pour que la clé de chiffrage soit satisfaisante.

3) On utilise la clé $(35, 2)$. On chiffre donc un code x en un code y par la formule $y = f(x) \equiv 35x + 2$ [6].

Compléter avec le plus petit entier : $5 \times 35 \equiv \ldots$ [6].

En déduire une fonction affine permettant de lire un message codé : $x = g(y) = \ldots\ldots$