Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 $F(x) = x^3 + 3x^2 - x$ est une primitive de $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$,
et donc, $I = \displaystyle\int_0^1 \left(3x^2 + 6x - 1\right)\, dx \Big[F(x) \Big]_0^1 = F(1) - F(0) = 3 - 0 = 3$.

Exercice 2 Calculer $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2}{(3x+2)^2}\, dx$

$F(x) = -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3x+2}$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{2}{(3x+2)^2}$,
et donc $I = \Big[F(x) \Big]_0^2 = F(2) - F(0) = -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{8} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$

Exercice 3 La valeur moyenne est $\mu = \dfrac{1}{\pi - 0} \displaystyle\int_0^\pi f(x)\, dx$.

$F(x) = x^2 - \cos(x)$ est une primitive de f, et donc $\mu = \dfrac{1}{\pi} \Big[F(x) \Big]_0^\pi = \dfrac{1}{\pi} \left(F(\pi) - F(0)\right)$.
De plus $F(\pi) = \pi^2 - \cos(\pi) = \pi^2 + 1$ et $F(0) = 0^2 - \cos(0) = -1$,
et donc, $F(\pi) - F(0) = \pi^2 + 1 - (-1) = \pi^2 + 2$.
On trouve alors la valeur moyenne, $\mu = \dfrac{\pi^2 + 2}{\pi}$.

Exercice 4

1. $F(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + 2x^2 - \dfrac{5}{2}x$ et $G(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ sont des primitives de f et g.

   On a alors, $I = \displaystyle\int_1^5 f(x)dx = \Big[F(x) \Big]_1^5 = F(5) - F(1)$.

   On a $F(5) = -\dfrac{5^3}{6} + 2 \times 5^2 - \dfrac{5}{2} \times 5 = \dfrac{-125 + 300 - 75}{6} = \dfrac{100}{6} = \dfrac{50}{3}$

   et $F(1) = -\dfrac{1}{6} + 2 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{-1 + 12 - 15}{6} = \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3}$.

   Ainsi, $I = \dfrac{52}{3}$.

   De même, $G(5) = \dfrac{1}{2} \times 5^2 = \dfrac{25}{2}$ et $G(1) = \dfrac{1}{2}$, d'où $J = G(5) - G(1) = \dfrac{24}{2} = 12$.

2. L'aire A recherchée est alors $A = I - J = \dfrac{52}{3} - 12 = \dfrac{16}{3}$