Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 Soit, pour $x \neq 2$, $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2-4}$.

1. On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x+5$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = x^2 - 4$ donc $v'(x) = 2x$,
   donc, $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, soit $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4 - (x+5)(2x)}{\left(x^2-4\right)^2} = \dfrac{-x^2 - 10x - 4}{\left(x^2-4\right)^2}$.
2. En l'infini, on a $f \sim \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$, et ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 2 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$, donc, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
$f'(x)$ est du second degré, de discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$ et admet donc deux racines : $x_1 = \dfrac{4-2}{2\times 3} = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{4+2}{2\times 3} = 1$.

On a donc le tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{139}{27}$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

En l'infini, on a $f(x) \sim x^3$ et donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$,
et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

Exercice 3

1. f est un produit : $f = u\,v$, avec $u(x) = x^2 - 1$, et donc $u'(x) = 2x$, et $v(x) = e^x$, et donc $v'(x) = e^x$.
   On a alors, $f' = u'v + uv'$, soit $f'(x) = 2xe^x + (x^2-1)e^x$,
   et donc, en factorisant par e^x, $f'(x) = e^x\left(x^2 + 2x - 1\right)$.
2. Au point d'abscisse $a = 0$, on a $f(0) = -1$ et $f'(0) = -1$).
   Ainsi, la tangente a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -x - 1$.
3. F est un produit $F = u\,v$, avec $u(x) = (x-1)^2$, et donc $u'(x) = 2(x-1)$, et $v(x) = e^x$ et donc $v'(x) = e^x$.
   Ainsi $F' = u'v + uv'$, soit $F'(x) = 2(x-1)e^x + (x-1)^2e^x = e^x\left(2x - 2 + x^2 - 2x + 1\right) = e^x\left(x^2 - 1\right) = f(x)$.
4.