# Corrigé du devoir de mathématiques

**Exercice** 1

1. Les solutions de l'équation sans second membre $(E_0)$ sont $y_0(x) = Ae^{-2x}$.
2. $g(x) = -5xe^{-2x}$, soit $g = u\,v$, avec $\left\{\begin{array}{l} u(x) = -5x \\ v(x) = e^{-2x} = e^{w(x)} \end{array}\right.$ donc, $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = -5 \\ v'(x) = w'(x)e^{w(x)} = -2e^{-2x} \end{array}\right.$

   Ainsi, $g' = u'v + uv'$, soit $g'(x) = -5e^{-2x} + (-5x)\left(-2e^{-2x}\right) = -5e^{-2x} + 10xe^{-2x}$.
   On a alors,
   $$g'(x) + 2g(x) = -5e^{2x} + 10xe^{-2x} + 2\left(-5xe^{-2x}\right) = -5e^{2x} + 10xe^{-2x} - 10xe^{-2x} = -5e^{2x}$$
   ce qui montre que $g$ est bien une solution de $(E)$.
3. On déduit des deux questions précédentes que les solutions de $(E)$ sont
   $$y(x) = y_0(x) + g(x) = Ae^{-2x} - 5xe^{-2x}$$
4. $f$ est une solution de $(E)$, donc $f$ est de la forme $f(x) = Ae^{-2x} - 5xe^{-2x}$.
   On a de plus, $f(0) = Ae^0 - 5 \times 0 \times e^0 = A = 1$.
   Ainsi, $f(x) = e^{-2x} - 5xe^{-2x} = (1 - 5x)e^{-2x}$.

**Exercice** 2

1. Soit $g(x) = k \in \mathbb{R}$, alors $g'(x) = g''(x) = 0$, et donc on doit avoir, pour que $g$ soit solution de $(E)$, $13g = 13k = -39$. Ainsi $k = -3$, et $g(x) = -3$ est une fonction constante solution de $(E)$.
2. L'équation sans second membre associée est $(E_0)$ : $y" - 4y' + 13y = 0$, dont l'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 13 = 0$.
   Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 13 = -36 < 0$, et a donc deux solutions complexes
   $$r_1 = \frac{4 - i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i \quad \text{et } r_2 = 2 + 3i$$
   Les solutions $y_0$ de $(E_0)$ sont alors $y_0(x) = e^{2x}\Big(A\cos(3x) + B\sin(3x)\Big)$.
3. Les solutions de $(E)$ sont alors $y(x) = g(x) + y_0(x) = -3 + e^{2x}\Big(A\cos(3x) + B\sin(3x)\Big)$.