Devoir de mathématiques

Exercice 1 Soit la fonction f définie par $f(x) = xe^{-6x}$.

a) Calculer la dérivée f' de f.
Montrer alors que f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' + 6y = e^{-6x}$.

b) À l'aide de la dérivée de f, donner le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
Tracer alors l'allure de la courbe de f.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + 2y = -5e^{-2x}$$

où y est une fonction inconnue de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0) : y' + 2y = 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5xe^{-2x}$. Démontrer que g est une solution de (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

Exercice 3 On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' - 4y' + 13y = -39$$

où y est une fonction inconnue de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer une fonction constante g, solution de l'équation (E).
2. Ecrire l'équation sans second membre (E_0) associée à (E), et son équation caractéristique.
   Résoudre cette équation et en déduire les solutions y_0 de (E_0).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

Exercice 4 On considère l'équation $(E) : y'' + 6y' + 9y = 5\cos(2x) - 12\sin(2x)$.

1. Vérifier que la fonction définie par $g(x) = cos(2x)$ est une solution de (E).
2. Déterminer les solutions de l'équation sans second membre associée à (E).
3. En déduire les solutions de (E).
4. Trouver alors la solution f de (E) qui vérifie de plus $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.