Probabilités - Exercices

Exercice 1 J'achète trois billets de tombola. Donner l'événement contraire de l'événement A=”Tous mes billets sont gagnants”.

Exercice 2 On lance un dé à six faces : on a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. On peut avoir :

a) Dé normal (non truqué) : Les probabilités des six événements élémentaires sont égales.
Donner ces probabilités puis donner la probabilité de l'événement A : ≪le nombre sorti est pair≫

b) Dé truqué : $P(\{1\}) = \dfrac{1}{12}$, $P(\{6\}) = \dfrac{5}{12}$ et $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\})$.
Calculer $P(\{2\})$ puis donner la probabilité de l'événement A : ≪le nombre sorti est pair≫

c) Question ouverte : comment savoir qu'un dé est truqué ou non ? Avec certitude ?

Exercice 3 a) Soit A et B deux événements. On donne $p(A \cup B) = 0,4$, $p(B) = 0,8$ et $p(A \cap B) = 0,5$.
Calculer $p(A)$.

b) Dans un lot de 32 pièces, 8 ont subi le contrôle C_1, 12 le contrôle C_2 et 3 les contrôles C_1 et C_2. On choisit au hasard une pièce, quelle est la probabilité pour qu'elle ait subi le contrôle C_1 ou le contrôle C_2 ?

Exercice 4 Dans un groupe de 20 personnes, 10 personnes s'intéressent au basket, 8 à la lecture et 5 ne s'intéressent ni à l'un ni à l'autre.
On note les événements A :”la personne s'intéresse au basket” et B :”la personne s'intéresse à la lecture”.

1. Compléter le tableau ci-contre.
2. Déterminer la probabilité pour qu'une personne prise au hasard dans ce groupe s'intéresse
   a)à l'une au moins des deux activités   b) aux deux activités
3. Une personne du groupe est en train de lire. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit intéressée par le basket.

Effectifs	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			20

Exercice 5 Le digicode ci-contre se trouve à l'entrée d'un immeuble. Un code se compose de 2 lettres, puis 3 chiffres, par exemple $BA544$.

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9

1. Déterminer le nombre de codes possibles, puis la probabilité de taper au hasard le bon code d'entrée.
2. a. Les 3 chiffres du code se suivent ; quelle est la probabilité que je tape le bon code ?
   b. Le code est composé de 2 lettres distinctes et de 3 chiffres aussi distincts ; quelle est la probabilité que je tape le bon code ?

Exercice 6 On tire deux cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien de mains différentes sont possibles ?
2. Combien y'a-t'il de paires d'as ?
3. Quelle est la probabilité de tirer une paire d'as ?

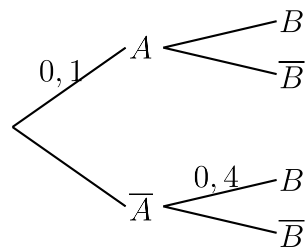
Exercice 7 Le système de code d'une carte bancaire comprend 10 chiffres. On forme un code en choisissant, dans l'ordre, 4 chiffres parmi les 10, les chiffres pouvant être répétés.

1. Sur 3 essais au hasard, quelle est la probabilité de taper le code correct ?
2. Je me rappelle que le code exact commance par un 2. Quelle est alors la probabilité de taper le code complet exact ?

3. J'utilise un moyen informatisé qui teste successivement tous les codes, à raison de un code testé toutes les 10 secondes.

   Combien de temps mettra mon système pour tester tous les codes ?

Exercice 8 Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre. On sait de plus que $P(B) = 0,39$.



1. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
2. En déduire la probabilité de B sachant A.
3. Dresser l'arbre pondéré "inversé".

Exercice 9 **Fiabilité d'un test de contrôle de conformité**

Une entreprise de produits pharmaceutiques fabrique un certain type de comprimés.

Dans la production journalière, 90% des comprimés produits sont conformes. On contrôle chaque comprimé de la production. Lorsqu'un comprimé est conforme, il est toujours accepté à l'issue du contrôle, tandis que lorsqu'il n'est pas conforme, le contrôle n'étant pas infaillible, il peut néanmoins être accepté avec une probabilité de 5%.

On note les événements C :"le comprimé prélevé est conforme" et A :"le comprimé est accepté à l'issue du contrôle".

1. Décrire la situation par un arbre.
2. On prélève au hasard un comprimé dans la production d'une journée. Donner les probabilités :
   a) qu'un comprimé soit accepté au contrôle et soit conforme ;
   b) qu'un comprimé soit accepté au contrôle et ne soit pas conforme ;
   c) qu'un comprimé soit accepté au contrôle.
3. Un comprimé est accepté au contrôle. Quelle est la probabilité qu'il soit conforme ?

   (Indication : utiliser l'arbre du 1. "inversé")
4. On suppose maintenant que dans la production seulement 80% des comprimés produits sont conformes, le test de contrôle restant le même.

   Déterminer de même que précédemment la probabilité qu'un comprimé accepté au contrôle soit conforme.

Exercice 10 **Test de dépistage**

On définit, pour un test de dépistage d'une maladie :

— sa *sensibilité* : la probabilité qu'il soit positif si la personne est atteinte de la maladie (vrai positif).

— sa *spécificité* : la probabilité qu'il soit négatif si la personne est indemne de la maladie (vrai négatif).

— sa valeur prédictive positive : la probabilité que la personne soit réellement malade si son test est positif.

— sa valeur prédictive négative : la probabilité que la personne n'ait pas la maladie si son test est négatif.

Les deux premières sont des valeurs caractérisant un test, du point de vue du constructeur (laboratoire).

Les valeurs prédictives sont quant à elles des données intéressantes du point de vue de l'usager (patient).

Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

— la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est $0,98$ (sensiblité du test) ;

— la probabilité qu'un individu non malade ait un test négatif est $0,99$ (spécificité du test).

On notera par la suite les événements M« l'individu est malade »et T :« le test est positif ».

1. On utilise ce test pour dépister une maladie qui touche 30% de la population.
   a) Dresser un arbre pondéré décrivant la situation.
   b) Calculer la probabilité de l'événement T.

c) Déterminer les valeurs prédictives positive et négative du test.

2. On suppose maintenant que la proportion de malade est f.

a) Déterminer de même que précédemment les valeurs prédictives positive et négative que l'on notera respectivement $G(f)$ et $H(F)$.

b) Tracer l'allure des courbes de $G(f)$ et $H(F)$.

c) Que peut-on dire du dépistage d'une maladie rare dans une population ?

Exercice 11 Tous les élèves d'une promotion ont passé un test de certification en anglais.
— 80 % ont réussi le test.
— Parmi ceux qui ont réussi le test, 95 % le passaient pour la 1ère fois.
— Parmi ceux qui ont échoué au test, 2 % le passaient pour la 1ère fois.
On considère les événements R :"l'élève a réussi le test", et F :"l'élève a passé le test plusieurs fois".

1. Traduire l'énoncé en termes de probabilité et dresser un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'un élève pris au hasard ait passé le test pour la 1ère fois et l'ait réussi.
3. Déterminer la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait passé plusieurs fois le test.
4. On choisit au hasard un élève ayant passé plusieurs fois le test. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi ?

Exercice 12 On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

a) A :« la carte tirée est un valet »et B :« la carte tirée est noire ».

b) A :« la carte tirée est un valet »et B :« la carte tirée est une figure ».

Exercice 13 Un sondage auprès de clients d'un magasin a donné les préférences suivantes, en fonction de la catégorie d'âge.
"Avoir moins de 30 ans" et "préférer les films" sont-ils indépendants ?

Age \ Préférence	Films	Séries
Moins de 30 ans	120	150
Plus de 30 ans	220	260

Exercice 14 On suppose que chacun des moteurs d'un avion bimoteur tombe en panne avec une probabilité de $0,000\,1$ et ceci de façon indépendante de l'autre moteur.
Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port, sachant qu'il peut voler avec un seul moteur ?

Exercice 15 Un circuit électronique est formé de 10 éléments identiques installés en série. Chaque élément a, indépendamment des autres, une probabilité de 0,2 de tomber en panne.

Quelle est la probabilité pour que le circuit tombe en panne ?

Exercice 16 *D'après BTS* Une entreprise fabrique des moteurs électriques. Afin de vérifier la conformité des moteurs, on procède à deux tests : l'un de type mécanique, et l'autre de type électrique.
Un moteur est rejeté s'il présente au moins l'un des deux types de défaut. Un moteur est déclaré en parfait état de marche s'il ne présente aucun des deux types de défaut.
Une étude statistique de la production conduit à dégager les résultats suivants :
— la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour le test mécanique est 0,08 ;
— la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour le test électrique est 0,05 ;
— la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour les deux tests est 0,02.
On prélève au hasard un moteur dans la production. On note les événements D_M :"le moteur prélevé présente un défaut de type mécanique", et D_E :"le moteur prélevé présente un défaut de type électrique".

1. a. Les événements D_M et D_E sont-ils indépendants ?
   b. Calculer la probabilité de l'événement D_M sachant que l'événement D_E est réalisé.
2. a. Calculer la probabilité de l'événement A : "le moteur prélevé présente au moins un défaut".
   b. Démontrer que la probabilité de l'événement B : "le moteur prélevé est en parfait état de marche" est de 0,89.
   c. Déterminer la probabilité de l'événement C : "le moteur prélevé présente un seul défaut.

Exercice 17 Un lot de 100 pièces comprend 5 pièces défectueuses. On tire au hasard, avec remise, 10 pièces dans le lot.

1. Quelle est la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse parmi les 10 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir une seule pièce défectueuse parmi les 10 ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse parmi les 10 ?