Equations différentielles - Exercices

I - Nombres complexes

Exercice 1 Résoudre l'équation $x^2+2x+2=0$.
Vérifier que les deux nombres complexes trouvés sont bien solutions de l'équation.

Exercice 2 Résoudre les équations :
a) $x^2+2x+65=0$ b) $r^2+4r+4=0$ c) $z^2-3z-4=0$ d) $z^2=-4$ e) $z^2=7$
f) $z^2-4z+8=0$ g) $r^2-\dfrac{1}{2}r+\dfrac{1}{8}=0$ h) $r^2-3r+3=0$ i) $r^2+8r-20=0$

II - Equations différentielles

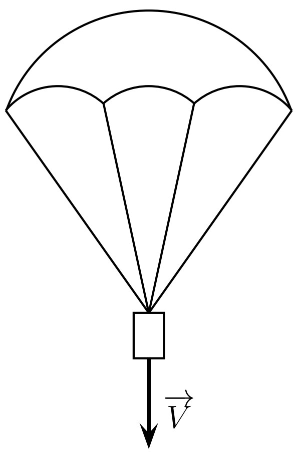
1) Equations différentielles linéraires du premier ordre

Exercice 3 Résoudre l'équation $2y'+4y=3$, en recherchant une fonction constante solution particulière.

Exercice 4 Résoudre l'équation différentielle $y'+3y=e^{-t}$, en recherchant une solution particulière sous la forme $y_p(t)=Ae^{-t}$.

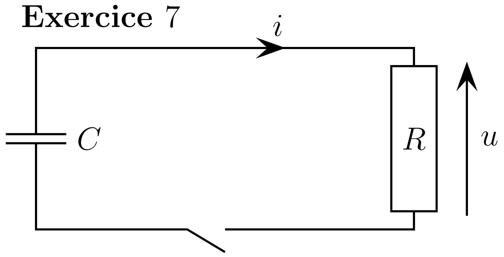
Exercice 5 Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'+3y=12$.
Déterminer alors la solution de (E) vérifiant $y(0)=1$.

Exercice 6 **Vitesse d'un parachute** La vitesse d'un objet suspendu à un parachute est solution de l'équation (E) : $mv'(t)+kv(t)=mg$.
On prendra : $m=10kg$, $g=10\,m.s^{-2}$ et $k=25$ u.S.I.



1. Déterminer la fonction constante v_p solution de (E).
   Donner alors l'ensemble des solutions de (E).
2. a) Donner la solution v_1 de l'équation (E) dont la vitesse initiale est $v_1(0)=5\,m.s^{-1}$.
   b) Donner la solution v_2 de l'équation (E) dont la vitesse initiale est $v_2(0)=10\,m.s^{-1}$.
   c) Donner la solution v_3 de l'équation (E) dont la vitesse initiale est nulle.
   d) Déterminer les limites lorsque $t\to+\infty$ des fonctions v_1, v_2 et v_3.

Exercice 7



Dans un circuit RC, on a les relation $u(t)=Ri(t)$
et $i(t)=-\dfrac{dq}{dt}=-q'(t)$ avec la charge $q(t)=Cu(t)$.
Ainsi, $u(t)=Ri(t)=R\Big(Cu(t)\Big)'$,
soit encore l'équation différentielle (E) : $RCu'(t)+u(t)=0$.

On prend $C=15.10^{-5}$ farads et $R=2.10^{4}$ ohms.

1. Résoudre l'équation différentielle (E), puis déterminer la fonction u solution telle que $u(0) = u_0 = 10$ volts.
2. Déterminer la limite $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)$.
3. A partir de quel instant t_1 la tension $u(t)$ vérifie $u(t) \leqslant \dfrac{1}{10}u_0$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction u.

Exercice 8 **Incident à l'eau de mer**
Un réservoir contient 1000 litres d'eau douce dont la salinité est de $0,12\ g.L^{-1}$.
A la suite d'un incident, de l'eau de mer pénètre dans le réservoir à raison de 10 litres par minute.
On s'intéresse à l'évolution au cours du temps de la salinité dans le réservoir. On note s cette salinité, s étant donc une fonction du temps t.
On admet que s est solution de l'équation différentielle

$$(E):\quad s' + 0,01s = 0,39$$

1. a) Résoudre l'équation $(E_1):\quad s' + 0,01s = 0$.
   b) Déterminer une fonction constante g solution de l'équation (E).
   c) Résoudre l'équation (E).
2. A l'instant $t = 0$ où débute l'incident, la salinité de l'eau dans le réservoir était de $0,12\ g.L^{-1}$. Montrer que l'on alors $s(t) = 39 - 38,88\,e^{-0,01t}$.
3. Déduire du résultatprécédent la salinité de l'eau dans le réservoir au bout de 60 minutes.
4. De combien de temps le service d'intervention dispose-t'il pour colmater l'infiltration si la salinité doit rester inférieure à $3,9\,g.L^{-1}$?

2) Equations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 9 Soit l'équation différentielle $(E):\ y" - y' - 6y = 6t$.

1. Vérifier que les fonctions $y_1(t) = Ae^{3t}$ et $y_2(t) = Be^{-2t}$ sont des solutions de l'équation sans second membre $(E_0):\ y" - y' - 6y = 0$.
2. Déterminer les nombres réels a et b tels que $y_p(t) = at + b$ soit une solution de (E).
3. En déduire que $y = y_1 + y_2 + y_p$ est une solution générale de (E).

Exercice 10 Vérifier que la fonction définie par $y(t) = e^{2t}\cos(3t)$ est une solution de l'équation $(E_0):\ y" - 4y' + 13y = 0$.

Exercice 11 Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' - 4y' + 3y = 0$.

Exercice 12 Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + 2y = 0$.

Exercice 13 Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y = 0$.

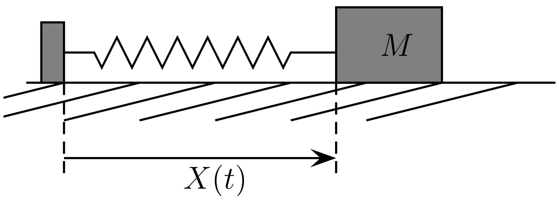
Exercice 14 Soit l'équation différentielle $(E):\ y" - 4y' + 3y = -3t^2 + 2t$.
Chercher une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
Déterminer alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 15 Soit l'équation $(E):\ y" - 4y' + 4y = 3e^{-t}$.
Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(t) = Ae^{-t}$.
Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 16 On considère l'équation différentielle : $(E) : y'' - 3y' + 2y = 4$,
dans laquelle y est une fonction de la variable x.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) sans second membre associée à (E).
2. Déterminer une fonction constante g solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant de plus les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

Exercice 17 **Objet retenu par un ressort.**
On fixe à l'extrémité d'un ressort horizontal un objet qui peut coulisser sans frottement sur un plan.



On repère l'objet par sa position X qui varie en fonction du temps t.
On admet que la fonction X est solution de l'équation

$$(E) : X'' + 100X = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution de l'équation (E) telle que $X(0) = 10^{-1}$ et $X'(0) = 0$.
3. On admet que si l'objet M frotte sur le plan, l'équation différentielle devient $(E') : X'' + X' + 100 = 0$.
   Résoudre de même (E'), avec les mêmes conditions initiales.
4. Représenter graphiquement les solutions de (E) et (E').

Exercice 18 **Oscillations libres et amorties dans un fluide visqueux.**
L'écart à sa position initiale d'un objet dans un fluide visqueux est une fonction du temps solution de l'équation différentielle

$$(E) : \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière de (E) qui s'annule pour $t = 0$ et dont la dérivée vaut 4 pour $t = 0$.

Exercice 19 **Oscillations forcées et amorties dans un fluide visqueux.**
L'objet de l'exercice précédent, toujours dans le même fluide visqueux, est maintenant soumis à une excitation entretenue.
L'écart de l'objet à sa position initiale est alors solution de l'équation différentielle

$$(E) : \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 10\cos(2t)$$

1. Montrer que la solution g définie par $g(t) = 2\sin(2t) - \cos(2t)$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).
3. Déterminer la solution f de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

III - Problèmes complets

Exercice 20 **Partie A. Résolution d'une équation différentielle**
On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = x$ où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.
2. Rechercher une fonction affine solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B. Etude de la solution.
On étudie la fonction f trouvée ci-dessus, définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par $f(x) = 2e^{-x} + x - 1$.

1. Calculer la dérivée f' de f.
   Etudier son signe et dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-1)$.
   On note Δ la droite d'équation $y = x - 1$. Interpréter graphiquement le résultat précédent, puis tracer Δ et l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 21 **Problème d'isolation.**
Pour tester la résistance d'une plaque d'isolation phonique à la chaleur, on porte sa température à 100°C et on étudie l'évolution de sa température en fonction du temps.
On note $\theta(t)$ la température de la plaque, en degré Celsius, à l'instant t, en minutes.
La température ambiante est de 19°C et après 6 minutes la température est redescendue à 82°C.
On admet que la fonction θ est solution de l'équation différentielle $(E) : y' + 0,042y = 0,798$.
Partie A.

1. Rechercher une fonction constnate solution particulière de (E).
   Donner alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).
2. D'après l'énoncé, que vaut $\theta(0)$, la température initiale de la plaque.
   En déduire la solution particulière de (E) donnant la température de la plque en fonction du temps.

Partie B.

1. Calculer la température de la plaque après 35 minutes.
2. Calculer la dérivée θ' de θ. En déduire le sens de variation de $theta$ sur $[0; +\infty[$.
3. Calculer la limite de $\theta(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
4. Représenter graphiquement la fonction θ.
5. Calculer le temps à partir duquel la température de la plaque est inférieure à 30°C. Vérifier graphiquement ce résultat.