Fonctions - Exercices

Courbe représentative d'une fonction

Exercice 1 Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-contre.
Tracer, dans un repère orthogonal, l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f.

x	$-\infty$		-4		2		5		$+\infty$
$f(x)$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-5

Exercice 2 On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction g.
Tracer, dans un repère orthogonal, l'allure de la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g.

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$g(x)$	-3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3 Pour chacune des fonctions, tracer la courbe représentative et donner le tableau de signes :

1) $f(x) = 2x + 3$ 2) $f(x) = 2x - 3$ 3) $f(x) = -2x + 1$ 4) $f(x) = x^2$ 5) $f(x) = x^2 - 4$

6) $f(x) = x^2 - x - 2$ 7) $f(x) = x^2 + x - 6$ 8) $f(x) = x^3$ 9) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 10) $f(x) = \ln(x)$

11) $f(x) = e^x$ 12) $f(x) = \cos(x)$ 13) $f(x) = \sin(x)$ 14) $f(x) = \sin(2\pi x)$

15) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ 16) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } & & x < 0 \\ 1 & \text{si } & 0 \leqslant & x < 2 \\ -2 & \text{si } & 2 \leqslant & x < 5 \\ 0 & \text{si } & & x \geqslant 5 \end{cases}$ 17) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } & & x < 0 \\ x & \text{si } & 0 \leqslant & x < 1 \\ -2x + 3 & \text{si } & 1 \leqslant & x < 3 \\ x - 6 & \text{si } & 3 \leqslant & x < 6 \\ 0 & \text{si } & & x \geqslant 6 \end{cases}$

Logarithme et exponentielle

Exercice 4 Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

1) $\ln\left(e^{-1}\right)$ 2) $\ln\left(e^{12}\right)$ 3) $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$ 4) $\ln\left(\dfrac{1}{e^3}\right)$ 5) $\ln\left(\sqrt{e}\right)$ 6) $\ln\left(\dfrac{e^3}{e^2}\right)$

7) $e^{\ln 2}$ 8) $e^{-\ln 3}$ 9) $e^{2\ln 3}$ 10) $e^{-2\ln 3}$ 11) $e^{\frac{1}{2}\ln 3}$ 12) $e^{\ln 3+\ln 5}$ 13) $e^{x-1}e^{-x+2}$

Signe d'une expression algébrique

Exercice 5 Déterminer le signe des expressions suivantes :

• $A(x) = 3x - 1$ • $B(x) = 2x + 12$ • $C(x) = x^2 - 4$ • $D(x) = x^2 - 7x + 12$ • $E(x) = 2x^2 - 3x + 1$

• $F(x) = \ln(x)$ • $G(x) = 2\ln(x) + 4$ • $H(x) = e^x$ • $I(x) = 3e^x - 6$ • $J(x) = (2x + 1)(x - 3)$

• $K(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$ • $L(x) = (2x - 1)(3x + 6)(-x + 2)$ • $M(x) = \dfrac{e^x - 2}{x + 3}$ • $N(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{x^2 - 9}$

Dérivées

Exercice 6 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^2 - 2$ 2) $f(x) = 2x^5 - 6x^3 + 3x - 2$ 3) $f(x) = -x^3 + \dfrac{1}{x}$ 4) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + \ln x$

5) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ 6) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2x+1}$ 7) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ 8) $f(x) = xe^x$ 9) $f(x) = (x^2+2)\ln x$

10) $f(x) = (x^2+3)^2$ 11) $f(x) = (x^2+3)^5$ 12) $f(x) = e^{3x+2}$ 13) $f(x) = 3xe^{x^2+1}$

14) $f(x) = \cos(2x+1)$ 15) $f(x) = x\sin(x^2)$ 16) $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$ 17) $f(x) = \dfrac{2x\ln x}{e^{-5x}+1}$

Limites et asymptotes

Exercice 7 Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction f. Interpréter graphiquement le résultat.

1) $f(x) = 3x - 125$ 2) $f(x) = -3x^2 + 12$ 3) $f(x) = -3x^2 + 17x - 36$ 4) $f(x) = x^3 - x + 1$

5) $f(x) = \dfrac{3x^2+x+1}{x^2-12}$ 6) $f(t) = \dfrac{t^2+31}{(t+3)(t-3)}$ 7) $f(t) = e^t$ 8) $f(t) = \ln(t)$ 9) $f(t) = \dfrac{1}{t} + e^{-t}$

10) $f(x) = \dfrac{150}{1+e^{1-x}}$ 11) $f(x) = xe^x$ 12) $f(x) = (x^2+3x-5)\,e^x$ 13) $f(x) = t\ln(t)$ 14) $f(x) = \dfrac{\ln(t)}{t}$

Exercice 8 Déterminer les limites, et interpréter graphiquement.

1) $\displaystyle\lim_{x\to3} \frac{2x^2+1}{(x-3)^2}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{2x-6}{(x-2)(x+2)}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to-3} \frac{x+5}{(x^2-9)}$ 4) $\displaystyle\lim_{x\to-3} \ln(x+3)$ 5) $\displaystyle\lim_{x\to1} e^{\frac{1}{x-1}}$

Etude de fonctions

Exercice 9 Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x+2}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (x-2))$ et interpréter graphiquement ce résultat.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-2} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.
3. Déterminer la dérivée f' de la f et en déduire le tableau de variation de f.
4. En utilisant tous les résultats précédents (en particulier en traçant les asymptotes), tracer l'allure de $\mathcal{C}$.

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - 6te^{-3t}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer la dérivée f' de f et déterminer son signe.
   En déduire le tableau de variation de f.

Exercice 11 Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = t + 1 - 10e^{-0,5t}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Caculer la dérivée f' de f. En déduire le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.

2. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation.
3. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$.

Exercice 12

1. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2 + 2\ln x$.
   a) Déterminer les limites en 0 et $+\infty$ de g.
   b) Calculer la dérivée g' de g et en déduire le tableau de variation de g.
   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$. On note α cette solution.
   Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.
   d) Donner le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
2. On considère maintenant la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + 1 - 2\dfrac{\ln x}{x}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.
   a) Déterminer la limite en 0 de f et interpréter graphiquement.
   b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation.
   c) Calculer la dérivée f' de f et montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   En déduire le tableau de variation de f.
   d) En utilisant tous les résultats précédents tracer l'allure de $\mathcal{C}$.