Probabilité

"Les questions les plus importantes de la vie ne sont pour la plupart que des problèmes de probabilité."
Pierre Simon de Laplace (1749-1827)

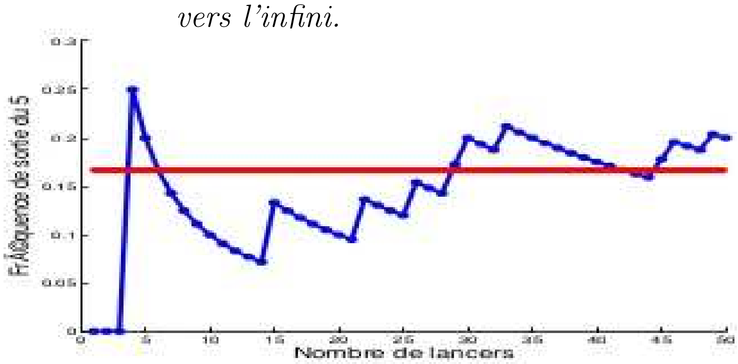
Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. *Henri Poincaré (1854-1912)*

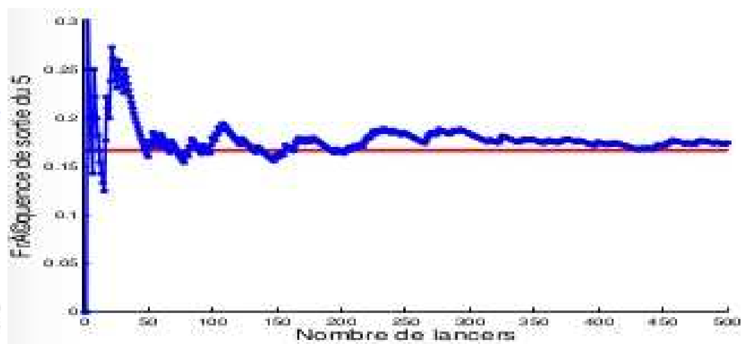
On connaît la frayeur de ce malade qui, sur le point de subir une intervention chirurgicale, demande :
- Docteur, combien a-t-on de chances de se tirer de là ?
- 99 pour cent.
- Et vous avez déjà réussi beaucoup d'opérations comme celle-là ?
- 99. *Jean-Louis Boursin, Les structures du hasard. Les probabilités et leurs usages*

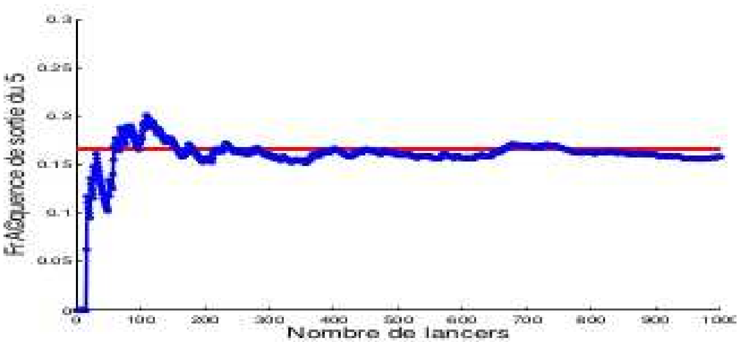
I - Loi des grands nombres

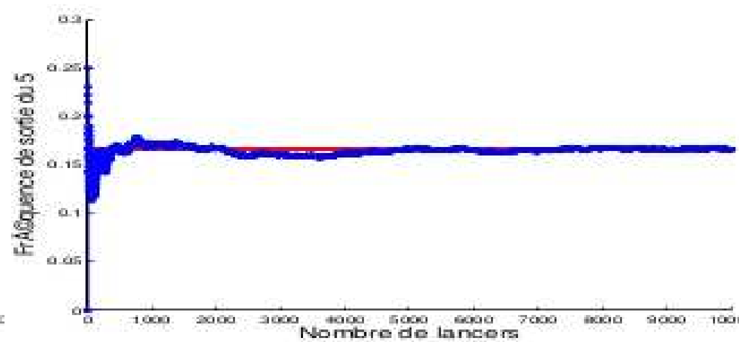
Jacob Bernoulli (mathématicien et physicien suisse, 1654 - 1705) donna un premier modèle mathématique de cette loi vers 1690 (édité en 1713 dans son ouvrage *ars conjectandi*). C'est sur cette loi que repose des institutions telles que les sondages, les assurances ...loi qui leur permet de calculer des probabilités et autres risques à partir d'études statistiques.

Théorème Loi des grands nombres
Si l'on répète N fois une expérience dans laquelle la probabilité d'apparition d'un évènement est P, la fréquence de cet évènement au cours des N expériences tend vers P lorsque N tend vers l'infini.









Ce théorème permet de faire le lien entre les statistiques et les probabilités, en justifiant le fait que l'on peut choisir comme probabilité d'un événement la fréquence statistique d'apparition de cet événément lorsque le nombre d'expériences est très grand.

La loi des grands nombres soulève une question d'ordre métaphysique : qu'un événement isolé soit soumis au hasard n'étonne personne. Pourtant, si l'on fait cette expérience un grand nombre de fois, on constate que les résultats s'équilibrent autour des probabilités, qui constituent d'une certaine façon une loi d'équilibre naturel.

Ainsi, à long terme, et avec cette vision probabiliste, le chaos semble impossible et les catastrophes de moins en moins probables.

Pour Andreï Kolmogorov (mathématicien russe, 1903 - 1987, dont les apports en mathématiques sont considérables), *"la valeur épistémologique de la théorie des probabilités est fondée sur le fait que les phénomènes aléatoires engendrent à grande échelle une régularité stricte, où l'aléatoire a, d'une certaine façon, disparu"*. Appliquée aux sociétés humaines, cette régularité statistique absolue qu'évoque Kolmogorov pose l'interrogation suivante : nos actions individuelles peuvent-elles être autre chose que la confirmation d'une tendance générale qui nous dépasse ?

II - Vocabulaire probabiliste

Définition

- *Une "**expérience aléatoire**" ou "**épreuve aléatoire**" est une expérience due au hasard*[1]*, c'est à dire dont on ne peut pas prévoir à l'avance le résultat, mais dont on connaît toutes les issues possibles.*
- *Les résultats d'une telle expérience sont appelés "**éventualités**" ou "**événements élémentaires**" ou "**issues**"*
- *L'ensemble des éventualités est appelé "**univers**" et est souvent noté U ou Ω.*
- *Un **événement** est une partie de Ω, c'est-à-dire un **sous ensemble** de l'univers, ou encore un ensemble d'éventualités.*

Exemple : Le lancer d'un dé est une expérience aléatoire (sauf si le dé est totalement truqué).
Une éventualité de cette expérience est 3.
L'univers est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. A="Obtenir un nombre pair" est un événement, et on a : A={2 ;4 ;6}

III - Langage des événements

Définition *Soit A et B deux événements liés à une expérience aléatoire dont l'univers est noté Ω.*

- *l'**événement contraire de A dans** Ω est l'événement qui contient les éléments de Ω qui ne sont pas dans A. C'est le **complémentaire de A dans** Ω et il est noté $\overline{A}$.*
- *l'**événement ≪A et B≫** est l'événement qui contient tous les éléments de Ω qui sont à la fois dans A et B. Cet événement est noté $A \cap B$.*
- *l'**événement ≪A ou B≫** est l'événement qui contient tous les éléments de Ω qui sont soit dans A soit dans B. Cet événement est noté $A \cup B$.*
- *On dit que les événements A et B sont **incompatibles** ou **disjoints** lorsqu'ils n'ont pas d'éléments en commun, c'est à dire lorsque $A \cap B = \emptyset$.*

Propriété *L'événement contraire $\overline{A}$ de l'événement A est caractérisé par : $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.*

Exercice 1 J'achète trois billets de tombola. Donner l'événement contraire de l'événement A="Tous mes billets sont gagnants".

Propriété *(Lois de De Morgan) Pour tous événements A et B, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$*

IV - Probabilité d'un événement

Définition *On définit une probabilité sur Ω, un univers fini, en associant à chaque événement un nombre compris entre 0 et 1 tel que :*

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *pour tous les événements incompatibles (ou disjoints).*

Exercice 2 On lance un dé à six faces : on a $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. On peut avoir :

a) Dé normal (non truqué) : Les probabilités des six événements élémentaires sont égales.
Donner ces probabilités puis donner la probabilité de l'événement A : ≪le nombre sorti est pair≫

1. de l'arabe ≪ al-zahr ≫signifiant à l'origine ≪ dés ≫et ayant pris ensuite la signification de ≪ chance ≫.
On peut aussi penser à l'étymologie ≪ yasara ≫(≪ jouer aux dés ≫) dont l'existence est attestée en arabe classique.
Le mot se charge de nouvelles significations, et notamment de celle de ≪ danger ≫. Déjà perceptible dans le mot ≪ hasardeux ≫, ce nouveau sens est devenu le noyau sémantique de l'anglais ≪ hazard ≫.

b) Dé truqué : $P(\{1\}) = \dfrac{1}{12}$, $P(\{6\}) = \dfrac{5}{12}$ et $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\})$.

Calculer $P(\{2\})$ puis donner la probabilité de l'événement A : «le nombre sorti est pair»

c) Question ouverte : comment savoir qu'un dé est truqué ou non ? Avec certitude ?

Propriété *Pour A et B deux événements quelconques on a :*

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$

Exercice 3 a) Soit A et B deux événements. On donne $p(A \cup B) = 0,4$, $p(B) = 0,8$ et $p(A \cap B) = 0,5$. Calculer $p(A)$.

b) Dans un lot de 32 pièces, 8 ont subi le contrôle C_1, 12 le contrôle C_2 et 3 les contrôles C_1 et C_2. On choisit au hasard une pièce, quelle est la probabilité pour qu'elle ait subi le contrôle C_1 ou le contrôle C_2 ?

Exercice 4 Dans un groupe de 20 personnes, 10 personnes s'intéressent au basket, 8 à la lecture et 5 ne s'intéressent ni à l'un ni à l'autre.

On note les événements A :"la personne s'intéresse au basket" et B :"la personne s'intéresse à la lecture".

1. Compléter le tableau ci-contre.
2. Déterminer la probabilité pour qu'une personne prise au hasard dans ce groupe s'intéresse

   a)à l'une au moins des deux activités   b) aux deux activités
3. Une personne du groupe est en train de lire. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit intéressée par le basket.

Effectifs	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			20

V - L'équiprobabilité

Définition *Si toutes les éventualités d'un univers Ω ont la même probabilité, on dit qu'on a une situation d'équiprobabilité sur Ω.*

Propriété *Sous l'hypothèse d'équiprobabilité sur Ω, la probabilité d'un événement A est :*

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éventualités dans } A}{\text{nombre d'éventualités dans } \Omega} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Exercice 5 Le digicode ci-contre se trouve à l'entrée d'un immeuble. Un code se compose de 2 lettres, puis 3 chiffres, par exemple $BA544$.

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9

1. Déterminer le nombre de codes possibles, puis la probabilité de taper au hasard le bon code d'entrée.
2. a. Les 3 chiffres du code se suivent ; quelle est la probabilité que je tape le bon code ?

   b. Le code est composé de 2 lettres distinctes et de 3 chiffres aussi distincts ; quelle est la probabilité que je tape le bon code ?

Exercice 6 On tire deux cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien de mains différentes sont possibles ?
2. Combien y'a-t'il de paires d'as ?
3. Quelle est la probabilité de tirer une paire d'as ?

Exercice 7 Le système de code d'une carte bancaire comprend 10 chiffres. On forme un code en choisissant, dans l'ordre, 4 chiffres parmi les 10, les chiffres pouvant être répétés.

1. Sur 3 essais au hasard, quelle est la probabilité de taper le code correct ?

2. Je me rappelle que le code exact commance par un 2. Quelle est alors la probabilité de taper le code complet exact ?
3. J'utilise un moyen informatisé qui teste successivement tous les codes, à raison de un code testé toutes les 10 secondes.

   Combien de temps mettra mon système pour tester tous les codes ?

VI - Probabilité Conditionnelle

Exercice 8 Un atelier utilise 3 machines M_1, M_2 et M_3. La fabrication est répartie suivant les machines, mais, selon la vétusté des machines, les pièces présentent parfois des défauts :

Machine	M_1	M_2	M_3
Pièces fabriquées	50%	35%	15%
Pièces produites défectueuses	1%	2%	6%

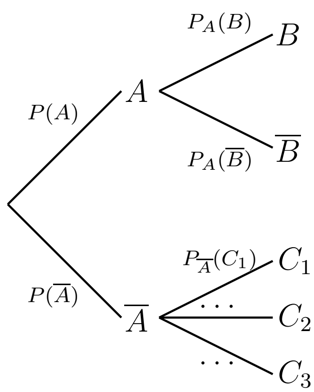
On tire une pièce au hasard dans le stock et on cherche la probabilité pour que cette pièce soit défectueuse. On appelle D l'événement "la pièce est défectueuse" et M_i l'événement "la pièce provient de la machine M_i" ($i = 1$, 2, ou 3).

Décrire la situation par un arbre de probabilité (arbre pondéré), et calculer la probabilité de l'événement D.

Définition *Soit P une probabilité sur un univers Ω et B un événement tel que $P(B) \neq 0$.*
La probabilité de A, sachant que B est réalisé, est notée $P_B(A)$ (ou $P(A|B)$).
Elle est définie par $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$ et donc on a

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

Arbre pondéré



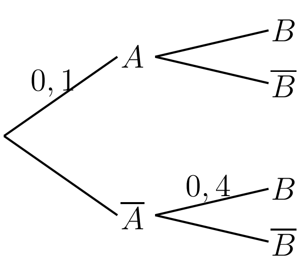
Règle 1. La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

Règle 2. Sur chaque branche, on inscrit la probabilité conditionnelle.

Règle 3. Un chemin correspond à l'intersection des événements. Sa probabilité est le produit des probabilités.

Règle 4. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui mènent à cet événement.

Exercice 9 Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre. On sait de plus que $P(B) = 0,39$.



1. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.
2. En déduire la probabilité de B sachant A.
3. Dresser l'arbre pondéré "inversé".

Exercice 10 **Fiabilité d'un test de contrôle de conformité**

Une entreprise de produits pharmaceutiques fabrique un certain type de comprimés.

Dans la production journalière, 90% des comprimés produits sont conformes. On contrôle chaque comprimé de la production. Lorsqu'un comprimé est conforme, il est toujours accepté à l'issue du contrôle, tandis que lorsqu'il n'est pas conforme, le contrôle n'étant pas infaillible, il peut néanmoins être accepté avec une probabilité de 5%.

On note les événements C :"le comprimé prélevé est conforme" et A :"le comprimé est accepté à l'issue du contrôle".

1. Décrire la situation par un arbre.
2. On prélève au hasard un comprimé dans la production d'une journée. Donner les probabilités :
   a) qu'un comprimé soit accepté au contrôle et soit conforme ;
   b) qu'un comprimé soit accepté au contrôle et ne soit pas conforme ;
   c) qu'un comprimé soit accepté au contrôle.
3. Un comprimé est accepté au contrôle. Quelle est la probabilité qu'il soit conforme ?
   (Indication : utiliser l'arbre du 1. "inversé")
4. On suppose maintenant que dans la production seulement 80% des comprimés produits sont conformes, le test de contrôle restant le même.
   Déterminer de même que précédemment la probabilité qu'un comprimé accepté au contrôle soit conforme.

Exercice 11 **Test de dépistage**
On définit, pour un test de dépistage d'une maladie :
— sa *sensibilité* : la probabilité qu'il soit positif si la personne est atteinte de la maladie (vrai positif).
— sa *spécificité* : la probabilité qu'il soit négatif si la personne est indemne de la maladie (vrai négatif).
— sa valeur prédictive positive : la probabilité que la personne soit réellement malade si son test est positif.
— sa valeur prédictive négative : la probabilité que la personne n'ait pas la maladie si son test est négatif.

Les deux premières sont des valeurs caractérisant un test, du point de vue du constructeur (laboratoire).
Les valeurs prédictives sont quant à elles des données intéressantes du point de vue de l'usager (patient).
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :
— la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est $0,98$ (sensiblité du test) ;
— la probabilité qu'un individu non malade ait un test négatif est $0,99$ (spécificité du test).
On notera par la suite les événements M« l'individu est malade »et T :« le test est positif ».

1. On utilise ce test pour dépister une maladie qui touche 30% de la population.
   a) Dresser un arbre pondéré décrivant la situation.
   b) Calculer la probabilité de l'événement T.
   c) Déterminer les valeurs prédictives positive et négative du test.
2. On suppose maintenant que la proportion de malade est f.
   a) Déterminer de même que précédemment les valeurs prédictives positive et négative que l'on notera respectivement $G(f)$ et $H(F)$.
   b) Tracer l'allure des courbes de $G(f)$ et $H(F)$.
   c) Que peut-on dire du dépistage d'une maladie rare dans une population ?

Exercice 12 Tous les élèves d'une promotion ont passé un test de certification en anglais.
— 80 % ont réussi le test.
— Parmi ceux qui ont réussi le test, 95 % le passaient pour la 1ère fois.
— Parmi ceux qui ont échoué au test, 2 % le passaient pour la 1ère fois.

On considère les événements R :"l'élève a réussi le test", et F :"l'élève a passé le test plusieurs fois".

1. Traduire l'énoncé en termes de probabilité et dresser un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'un élève pris au hasard ait passé le test pour la 1ère fois et l'ait réussi.
3. Déterminer la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait passé plusieurs fois le test.
4. On choisit au hasard un élève ayant passé plusieurs fois le test. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi ?

Définition *Deux événements de probabilités non nulles sont dits indépendants si la réalisation de l'un n'agit pas sur la réalisation de l'autre. En d'autres termes si $P_B(A) = P(A)$.*

Propriété *Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.*

Remarque : Si A et B sont indépendants alors A et $\overline{B}$ le sont aussi, tout comme B et $\overline{A}$ ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Exercice 13 On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

a) A :« la carte tirée est un valet »et B :« la carte tirée est noire ».

b) A :« la carte tirée est un valet »et B :« la carte tirée est une figure ».

Exercice 14 Un sondage auprès de clients d'un magasin a donné les préférences suivantes, en fonction de la catégorie d'âge.
"Avoir moins de 30 ans" et "préférer les films" sont-ils indépendants ?

Préférence / Age	Films	Séries
Moins de 30 ans	120	150
Plus de 30 ans	220	260

Exercice 15 On suppose que chacun des moteurs d'un avion bimoteur tombe en panne avec une probabilité de $0,000\,1$ et ceci de façon indépendante de l'autre moteur.
Quelle est la probabilité que l'avion arrive à bon port, sachant qu'il peut voler avec un seul moteur ?

Exercice 16 Un circuit électronique est formé de 10 éléments identiques installés en série. Chaque élément a, indépendamment des autres, une probabilité de 0,2 de tomber en panne.

Quelle est la probabilité pour que le circuit tombe en panne ?

Exercice 17 *D'après BTS* Une entreprise fabrique des moteurs électriques. Afin de vérifier la conformité des moteurs, on procède à deux tests : l'un de type mécanique, et l'autre de type électrique.
Un moteur est rejeté s'il présente au moins l'un des deux types de défaut. Un moteur est déclaré en parfait état de marche s'il ne présente aucun des deux types de défaut.
Une étude statistique de la production conduit à dégager les résultats suivants :
— la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour le test mécanique est 0,08 ;
— la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour le test électrique est 0,05 ;
— la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour les deux tests est 0,02.
On prélève au hasard un moteur dans la production. On note les événements D_M :"le moteur prélevé présente un défaut de type mécanique", et D_E :"le moteur prélevé présente un défaut de type électrique".

1. a. Les événements D_M et D_E sont-ils indépendants ?
   b. Calculer la probabilité de l'événement D_M sachant que l'événement D_E est réalisé.
2. a. Calculer la probabilité de l'événement A : "le moteur prélevé présente au moins un défaut".
   b. Démontrer que la probabilité de l'événement B : "le moteur prélevé est en parfait état de marche" est de 0,89.
   c. Déterminer la probabilité de l'événement C : "le moteur prélevé présente un seul défaut.

Exercice 18 Un lot de 100 pièces comprend 5 pièces défectueuses. On tire au hasard, avec remise, 10 pièces dans le lot.

1. Quelle est la probabilité de n'avoir aucune pièce défectueuse parmi les 10 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir une seule pièce défectueuse parmi les 10 ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse parmi les 10 ?