Introduction aux probabilités continues

I - Des probabilités discrètes aux probabilités continues

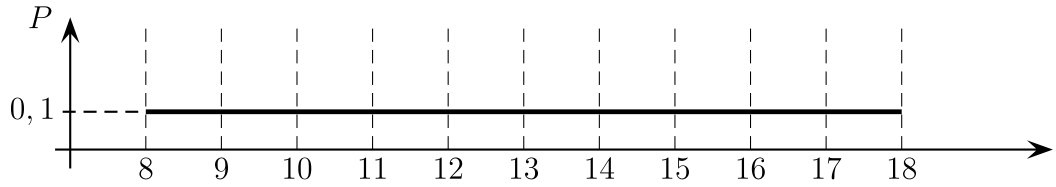
Le parking à proximité de mon travail coûte assez cher. Le stationnement est payant de 8h à 18h. Un agent municipal passe chaque jour, une fois par jour, aléatoirement entre 8h et 18h.

Partie A. Equiprobabilité

On suppose que la probabilité que l'agent passe est, à chaque instant entre 8h et 18h, la même. Quelle est la probabilité que je sois verbalisé par un agent municipal si je gare ma voiture sans payer

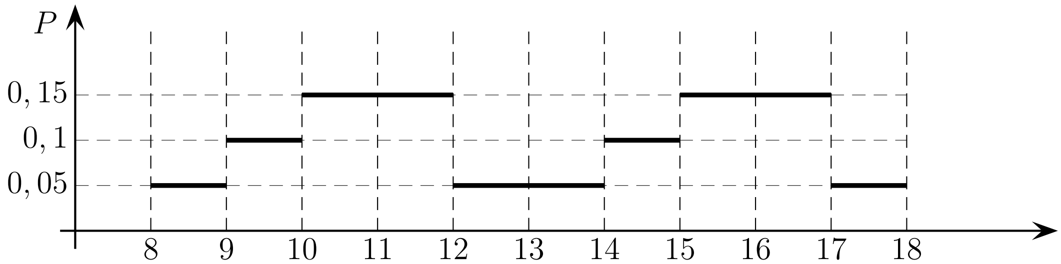
1. de 9h à 10h ?
2. de 15h à 16h ?
3. de 12h à 14h ?
4. de 10h30 à 12h ?
5. de 11h20 à 11h35 ?
6. à 10h34 précise ?

On peut représenter ce "profil" uniforme de probabilité de passage de l'agent sur un graphique :



Partie B. Vers un modèle plus réaliste

Ce "profil" constant n'est en fait pas très réaliste. Un modèle plus réaliste pourrait être celui proposé ci-dessous, prenant en compte un début de journée plus en douceur, une pause-déjeuner entre midi et deux, ...

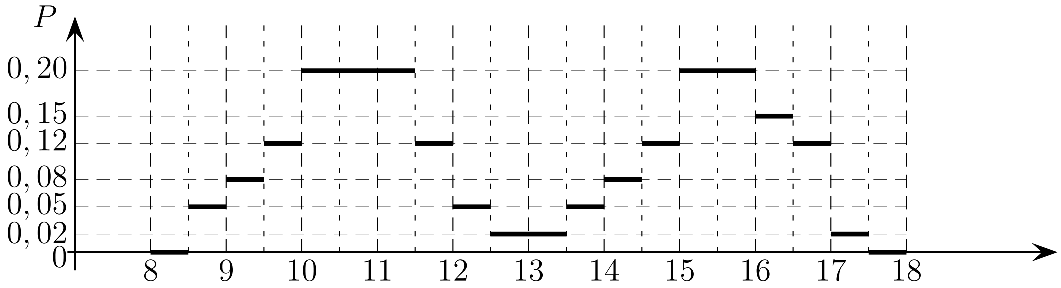


De même que dans la partie A, déterminer la probabilité que je sois verbalisé par un agent si je gare ma voiture sans payer :

1. de 8h à 9h ?
2. de 10h à 11h ?
3. de 11h à 14h ?
4. de 15h à 15h30 ?
5. de 8 à 18h ?

Partie C. Un modèle plus réaliste et plus fin

On peut encore affiner le profil précédent, avec un découpage horaire plus fin :

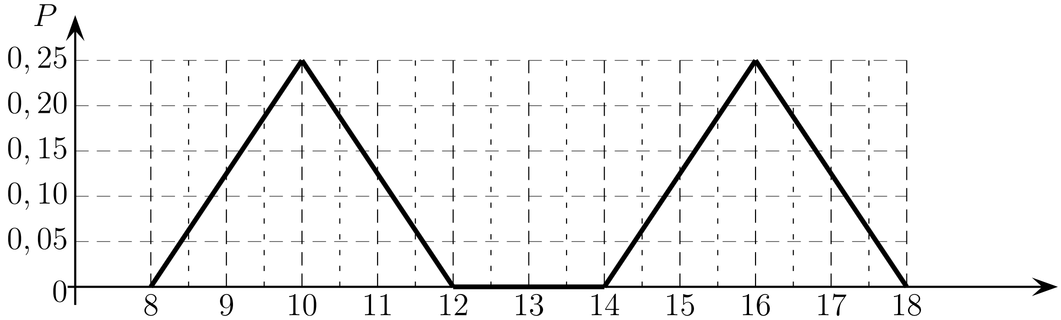


De même que précédemment, quelles sont les probabilités d'être verbalisé :

1. entre 8h et 18h ?
2. entre 10h et 11h ?
3. entre 11h30 et 14h ?

Partie D. Un modèle sans sauts, et encore plus réaliste...

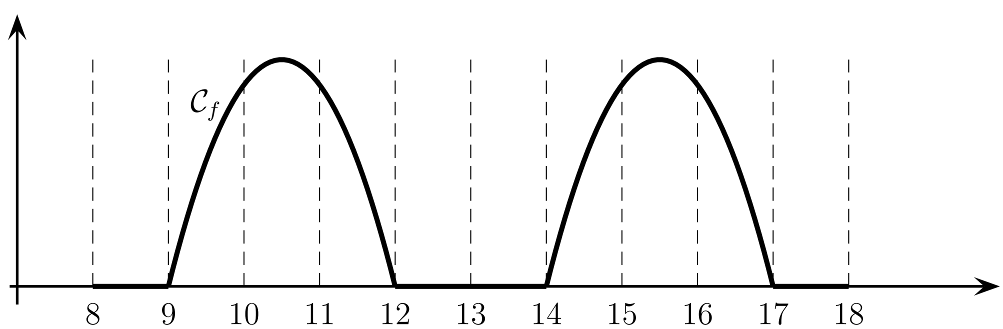
La probabilité de passage de l'agent peut dépendre de façon continue (ou sans sauts) de l'heure dans la journée.



De même que précédemment, quelles sont les probabilités d'être verbalisé :

1. entre 10h et 12h ?
2. entre 10h et 11h ?
3. entre 11h30 et 14h ?
4. entre 8h et 18h ?

Partie E. Un autre exemple de modèle (plus réaliste ?)



On donne cette fois :

— pour $8 \leqslant x \leqslant 9$, et $12 \leqslant x \leqslant 14$ et $17 \leqslant x \leqslant 18$, $f(x) = 0$.

— pour $9 \leqslant x \leqslant 12$, $\quad f(x) = -\dfrac{1}{9}\left(x^2 - 21x + 108\right)$.

— pour $14 \leqslant x \leqslant 17$, $\quad f(x) = -\dfrac{1}{9}\left(x^2 - 31x + 238\right)$.

Représenter graphiquement la probabilité que l'agent passe entre 10h et 12h.
Exprimer cette probabilité à l'aide d'une intégrale, puis la calculer.

Définition *Si on note X la variable aléatoire égale à l'heure de passage de l'agent, alors X peut prendre toutes les valeurs réelles de l'ensemble* **continu** $[8;18]$.

Définition *La fonction f, définissant le "profil" de probabilité, s'appelle la densité de probabilité de la variable aléatoire X, et on a alors*

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

On impose deux conditions à une densité de probabilité f,

— *pour tout $x \in [8;18]$, $f(x) \geqslant 0$ (les probabilités sont des nombres positifs)*

— $P(8 \leqslant X \leqslant 18) = \displaystyle\int_8^{18} f(x)\,dx = 1$ *(la somme des probabilités est 1)*

Dans la partie A, f est constante : pour tout $x \in [8,18]$, $f(x) = 0,1$.
Dans les parties B et C, f est une fonction en escalier, c'est-à-dire constante par morceaux.
Dans la partie D, f est une fonction affine par morceaux, et dans la partie E, f est définie par morceaux par deux arcs de parabole. Dans ces deux derniers cas, la fonction f est de plus continue.

II - Exemples de lois de probabilité continues

Loi exponentielle. La loi exponentielle permet de modéliser la durée de vie d'un phénomène, d'un composant électronique par exemple, ou encore de modéliser les phénomènes d'attente.

Cette loi de probabilité est définie par sa densité de probabilité, pour tout $x \in [0;+\infty[$,

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

où $\lambda > 0$ est le paramètre de cette loi.

Exemple. Dans un magasin, le temps d'attente en caisse est modélisé par une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

On considère la variable aléatoire X égale au temps d'attente en caisse. X est une variable aléatoire continue qui peut prendre toutes les valeurs de l'ensemble continu $[0;+\infty[$, et qui suit la loi de probabilité exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$.

1. Déterminer la probabilité d'attendre moins de 5 minutes, c'est-à-dire $P(0 \leqslant X \leqslant 5)$.
2. Quelle est la probabilité d'attendre entre 5 et 10 min ?
3. Quelle est la probabilité d'attendre plus de 15 min ?
4. a) Rappeler l'expression de la probabilité conditionnelle $P_B(A)$.
   b) Calculer est la probabilité que j'attende en caisse plus de 15 min sachant que j'attend déjà depuis 10 min.
   c) Quelle est la probabilité que j'attende en caisse plus de 30 min sachant que j'attend déjà depuis 25 min.

Loi de Weibull. Les lois de Weibull recouvrent toute une famille de lois, dont la fonction densité de probabilité a deux paramètres $k > 0$ et $\lambda > 0$ et peut s'écrire sous la forme, pour tout $x \in [0;+\infty[$,

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}$$

Pour $k = 1$, on retrouve la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{\lambda}$.

La loi de Weibull est souvent utilisée dans le domaine de l'analyse de la durée de vie.

Exemple On considère la loi de Weibull de paramètres $k = 2$ et $\lambda = 5$, ainsi

$$f(x) = \frac{2}{5}\left(\frac{x}{5}\right)^1 e^{-(x/5)^2} = \frac{2}{25}xe^{-x^2/25}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f.
   Comparer avec la densité de probabilité de la loi exponentielle de l'exercice précédent.
2. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = -e^{-x^2/25}$ est une primitive de f.
3. Calculer les probabilités
   a) $P(0 \leqslant X \leqslant 5)$
   b) $P(5 \leqslant X \leqslant 10)$
   c) $P(0 \leqslant X \leqslant 10)$
   d) $P(X \geqslant 10)$