Equations différentielles

I - Nombres complexes

"La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine de l'imaginaire."

Jacques Hadamard, mathématicien français (1865-1963)

Résolution d'équation et ensembles de nombres

L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, permet de résoudre des problèmes simples de décompte comme : "5 personnes viennent d'entrer de la salle. Il y a maintenant maintenant 22 personnes présentes. Combien y en avait-il initialement ?"
Si on note n le nombre de personnes initialement, on aboutit à l'équation $n + 5 = 22$, qui se résout facilement en $n = 27$.

Par contre, pour résoudre le problème "5 personnes viennent d'entrer dans la salle, il y en a maintenant 3", ces nombres ne suffisent pas : l'équation $n + 5 = 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, permet de résoudre ce genre de problème, ou des problèmes économiques ou commerciaux (principe du prêt, de l'avoir,...)

Pour des problèmes géométriques, les nombres entiers s'avèrent insuffisants. Par exemple, le milieu de $[1; 4]$ n'est pas un nombre entier, c'est $x = \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$.
L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$, quotients de deux nombres entiers, permettant ainsi de diviser les entiers, et de résoudre de nombreux autres problèmes.

Parmi les problèmes géométriques, un type de problème simple aura à son tour occupé les esprit : "On considère un triangle rectangle dont les deux côtés adjacents à l'angle droit mesurent chacun 1 mètre. Quelle fraction de cette longueur mesure l'hypothénuse ?"
Le théorème de Pythagore nous permet d'écrire que, si on note x la longueur de cette hypothénuse, on a $x^2 = 1^1 + 1^2 = 2$.
Cette équation n'a pas de solution qui soit un nombre rationnel, donc n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.
Cette équation se résout, facilement maintenant, à notre époque, par $x = \sqrt{2}$ qui est un nombre réel, et irrationnel.
L'ensemble de tous les nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Malheureusement encore, des équations telles que $x^2 = -1$ n'ont pas encore de solution réelle : pour n'importe quel nombre réel x, $x^2 \geqslant 0$, et donc il est impossible de trouver un nombre réel x tel que $x^2 = -1$ soit négatif.

Les nombres complexes ont été introduits à cette fin, pour compléter les nombres réels.
Avec les nombres complexes, toutes les équations algébriques (avec des polynômes) ont des solutions. On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Remarque : On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1) Forme algébrique d'un nombre complexe

On admet l'existence d'un ensemble de nombre, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes.
Les nombres complexes sont de la forme $a + bi$, où a et b sont des nombres réels et i et le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

Remarques : • i n'est donc pas un nombre réel.
• On note parfois j le nombre i, notamment en électricité où i est habituellement le courant...

Exemple : $z = 1+3i$; $z = -5+2i$; $z = 1,71-12i$; $z = 3$; $z = 5i$; $z = \sqrt{2}$; $z = \sqrt{2}i$;...

Dans l'écriture $z = a + bi$ d'un nombre complexe,

- le réel a est la partie réel du nombre complexe z
- le réel b est sa partie imaginaire

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est donc un nombre réel ($z = 3 = 3+0\times i$).

Ainis tous les nombres réels sont aussi des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, et l'ensemble des nombres complexes est plus grand que celui des nombres réels.

2) Calcul algébrique avec les nombres complexes

Toutes les opérations usuelles (addition, multiplication,...) et règles de calcul (factorisation, développement, identité remarquable,...) s'étendent aux nombres complexes.

Exercice 1 $2(1-3i) = \quad \dots \qquad (3+2i)(2-i) = \quad \dots \qquad (1+i)^2 = \quad \dots$

3) Equation du second degré à coefficients réels

Théorème *L'équation $ax^2 + bx + c = 0$, pour $a \neq 0$, b et c trois nombres réels, admet :*

- *si $\Delta > 0$, deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$*
- *si $\Delta = 0$, une solution réelle double $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$*
- *si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$*

Exercice 2 Résoudre l'équation $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Vérifier que les deux nombres complexes trouvés sont bien solutions de l'équation.

Exercice 3 Résoudre les équations :

a) $x^2 + 2x + 65 = 0$ b) $r^2 + 4r + 4 = 0$ c) $z^2 - 3z - 4 = 0$ d) $z^2 = -4$ e) $z^2 = 7$

f) $z^2 - 4z + 8 = 0$ g) $r^2 - \dfrac{1}{2}r + \dfrac{1}{8} = 0$ h) $r^2 - 3r + 3 = 0$ i) $r^2 + 8r - 20 = 0$

II - Equations différentielles

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

1) Généralités et exemples

On note en général $t \mapsto y(t)$ cette fonction (historiquement pour des équations de la physique, t étant le temps et $y(t)$ l'altitude à l'instant t de l'objet considéré).

Par exemple, $y' - 3y = 8t$ est une équation différentielle du 1er ordre : on cherche la fonction y telle que, à tout instant t, $y'(t) - 3y(t) = 8t$.

Exercice 4 On considère l'équation $y' - 3y = 8t$.

Vérifier que la fonction y définie par $y(x) = e^{3t} + 4t^2$ est une solution de cette équation.

Exercice 5 On considère l'équation $y" - y' - 6y = 0$

1. Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = e^{-2x}$ est une solution de cette équation.
2. Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = e^{3x}$ est une autre solution de cette équation.

3. Montrer que la fonction $h = f + g$ est alors aussi solution.

Exercice 6 On considère l'équation $y' - y = x - 1$.
Montrer que la fonction y définie par $y(x) = -x$ est une solution de cette équation.
Montrer que la fonction f définie par $f(x) = e^{-x} - x$ est aussi solution de cette équation.

Exercice 7 On considère l'équation $y' - 2y = -2x^2 - 2x$
Montrer que la fonction y définie par $y(x) = (x+1)^2$ est solution de cette équation.
Montrer que la fonction f définie par $f(x) = e^{2x} + (x+1)^2$ est aussi solution de cette équation.

2) Equations différentielles linéaires du premier ordre

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation, dont l'inconnue est une fonction y de la variable t, de la forme

$$(E): \quad ay'(t) + by(t) = f(t)$$

où a et b sont des constantes réelles, et f est une fonction.

Supposons que l'on connaisse une solution particulière y_p de l'équation (E), c'est-à-dire que $ay'_p + by_p = c$.
Alors, une fonction y est une solution de (E) si et seulement si $ay' + by = c$, soit

$$\begin{aligned} & ay' + by = ay'_p + by_p \\ \iff\ & ay' - ay'_p + by - by'_p = 0 \\ \iff\ & a\left(y' - y'_p\right) + b\left(y - y_p\right) = 0 \\ \iff\ & a\left(y - y_p\right)' + b\left(y - y_p\right) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $Y = y - y_p$, y est solution si et seulement si Y est solution de $aY' + bY = 0$.
Cette équation s'appelle l'équation sans second membre associée à (E).

Théorème *La solution générale de l'équation différentielle* $(E): \quad ay' + by = c$ *est obtenue en ajoutant une solution particulière de* (E) *à la solution générale de l'équation sans second membre* $(E_0): \quad ay' + by = 0$.

2.1 Résolution de l'équation sans second membre

Pour $a \neq 0$, on a $ay' + by = 0 \iff y' = -\dfrac{b}{a}y$.
Par exemple, pour $\dfrac{b}{a} = -1$, on a alors $y' = y$, et on sait que $y = ke^t$ est solution.
Plus généralement,

Propriété *les fonctions* $y : t \mapsto ke^{-\frac{b}{a}t}$, $k \in \mathbb{R}$ *vérifient* $ay' + by = 0$.

<u>Démonstration:</u> Il suffit de calculer $y'(t)$, puis $ay'(t) + by(t)\dots$ □
On a alors,

Théorème *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle* $(E): \quad ay'(t) + by(t) = c(t)$ *est l'ensemble des fonctions définies par* $t \mapsto ke^{-\frac{b}{a}t} + y_p(t)$, *où* $k \in \mathbb{R}$ *et* y_p *est une solution particulière de* (E).

2.2 Recherche d'une solution particulière

En général, une indication est fournie pour aider la recherche d'une telle solution.

• Cas où $c(t)$ est une constante
On recherche aussi y_p sous la forme d'une constante : $y_p(t) = C$.

Exercice 8 Résoudre l'équation $2y' + 4y = 3$, en recherchant une fonction constante solution particulière.

• Cas où $c(t)$ est un polynôme
On recherche y_p sous la forme d'un polynôme de même degré

Exercice 9 Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 4x - 1$, en cherchant une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax + b$.

• Cas où $c(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + B\sin(\omega t + \varphi)$
On recherche $y_p(t) = A'\cos(\omega t + \varphi) + B'\sin(\omega t + \varphi)$

• Cas où $c(t) = ke^{\lambda t}$
On recherche y_p sous la forme $y_p(t) = Ae^{\lambda t}$.

Exercice 10 Résoudre l'équation différentielle $y' + 3y = e^{-t}$, en recherchant une solution particulière sous la forme $y_p(t) = Ae^{-t}$.

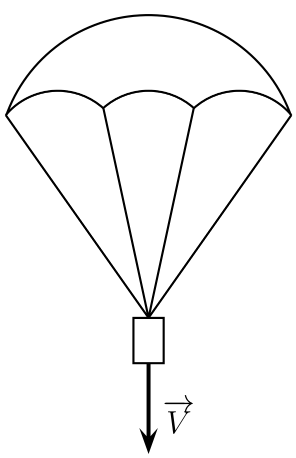
Remarque : Dans le cas très particulier où (E) : $ay' + by = ke^{-\frac{b}{a}t}$, alors on recherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = Ate^{-\frac{b}{a}t}$.

2.3 Solution vérifiant une condition initiale donnée

Exercice 11 Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 12$.
Déterminer alors la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

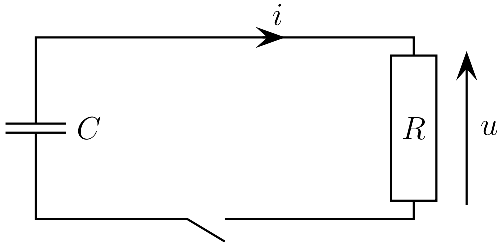
Théorème *Une équation différentielle linéaire du premier ordre a une solution unique vérifiant une condition initiale donnée.*

Exercice 12 **Vitesse d'un parachute** La vitesse d'un objet suspendu à un parachute est solution de l'équation (E) : $mv'(t) + kv(t) = mg$.
On prendra : $m = 10kg$, $g = 10\,m.s^{-2}$ et $k = 25$ u.S.I.



1. Déterminer la fonction constante v_p solution de (E).
   Donner alors l'ensemble des solutions de (E).
2. a) Donner la solution v_1 de l'équation (E) dont la vitesse initiale est $v_1(0) = 5\,m.s^{-1}$.
   b) Donner la solution v_2 de l'équation (E) dont la vitesse initiale est $v_2(0) = 10\,m.s^{-1}$.
   c) Donner la solution v_3 de l'équation (E) dont la vitesse initiale est nulle.
   d) Déterminer les limites lorsque $t \to +\infty$ des fonctions v_1, v_2 et v_3.

Exercice 13



Dans un circuit RC, on a les relation $u(t) = Ri(t)$ et $i(t) = -\dfrac{dq}{dt} = -q'(t)$ avec la charge $q(t) = Cu(t)$.
Ainsi, $u(t) = Ri(t) = R\Big(Cu(t)\Big)'$,
soit encore l'équation différentielle (E) : $RCu'(t) + u(t) = 0$.

On prend $C = 15.10^{-5}$ farads et $R = 2.10^4$ ohms.

1. Résoudre l'équation différentielle (E), puis déterminer la fonction u solution telle que $u(0) = u_0 = 10$ volts.
2. Déterminer la limite $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)$.
3. A partir de quel instant t_1 la tension $u(t)$ vérifie $u(t) \leqslant \dfrac{1}{10}u_0$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction u.

Exercice 14 **Incident à l'eau de mer**
Un réservoir contient 1000 litres d'eau douce dont la salinité est de $0,12\ g.L^{-1}$.
A la suite d'un incident, de l'eau de mer pénètre dans le réservoir à raison de 10 litres par minute.
On s'intéresse à l'évolution au cours du temps de la salinité dans le réservoir. On note s cette salinité, s étant donc une fonction du temps t.
On admet que s est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad s' + 0,01s = 0,39$$

1. a) Résoudre l'équation (E_1) : $\quad s' + 0,01s = 0$.
   b) Déterminer une fonction constante g solution de l'équation (E).
   c) Résoudre l'équation (E).
2. A l'instant $t = 0$ où débute l'incident, la salinité de l'eau dans le réservoir était de $0,12\ g.L^{-1}$. Montrer que l'on alors $s(t) = 39 - 38,88\,e^{-0,01t}$.
3. Déduire du résultatprécédent la salinité de l'eau dans le réservoir au bout de 60 minutes.
4. De combien de temps le service d'intervention dispose-t'il pour colmater l'infiltration si la salinité doit rester inférieure à $3,9\,g.L^{-1}$?

3) Equations différentielles linéaires du second ordre

Une équation différentielle du second ordre est une équation de la forme

$$(E) : \quad ay" + by' + cy = d$$

où $a \neq 0$, b, c sont trois réels, et d est une fonction.

Exercice 15 Soit l'équation différentielle (E) : $y" - y' - 6y = 6t$.

1. Vérifier que les fonctions $y_1(t) = Ae^{3t}$ et $y_2(t) = Be^{-2t}$ sont des solutions de l'équation sans second membre (E_0) : $y" - y' - 6y = 0$.
2. Déterminer les nombres réels a et b tels que $y_p(t) = at + b$ soit une solution de (E).
3. En déduire que $y = y_1 + y_2 + y_p$ est une solution générale de (E).

Exercice 16 Vérifier que la fonction définie par $y(t) = e^{2t}\cos(3t)$ est une solution de l'équation (E_0) : $y" - 4y' + 13y = 0$.

Théorème *La solution générale de l'équation différentielle (E) : $\quad ay" + by' + cy = d$ est obtenue en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de l'équation sans second membre (E_0) : $\quad ay" + by' + cy = d$.*

3.1 Résolution de l'équation sans second membre

Soit $y(t) = e^{rt}$, avec r un réel. Alors $ay" + by' + cy = (ar^2 + br + c)\, e^{rt}$, ainsi, $y(t) = e^{rt}$ est solution de l'équation (E_0) si et seulement si

$$ar^2 + br + c = 0$$

Définition *L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est* **l'équation caractéristique** *de l'équation différentielle sans second membre (E_0) : $\quad ay" + by' + cy = 0$.*

Théorème

- *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et donc $y_1 : t \mapsto e^{r_1 t}$ et $y_2 : t \mapsto e^{r_2 t}$ sont deux solutions de (E_0).*
  Les solutions de (E_0) sont donc de la forme $y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, avec A et B des constantes réelles.
- *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une solution double $r = -\dfrac{b}{2a}$, dans ce cas, $y_1 : t \mapsto e^{rt}$ est une solution de (E_0) ; $y_2 : t \mapsto te^{rt}$ en est une autre.*
  Ainsi, les solutions de (E_0) sont de la forme $y(t) = (A + Bt)\, e^{rt}$, avec A et B des constantes réelles.
- *Si $\Delta < 0$, L'équation caractéristique a deux solutions complexes $r_1 = a + ib$ et $r_2 = a - ib$, et les fonctions $y_1 : t \mapsto e^{at} \cos(bt)$ et $y_2 : t \mapsto e^{at} \sin(bt)$ sont solutions de (E_0).*
  Les solutions de (E_0) sont donc de la forme $y(t) = Ae^{at} \cos(bt) + Be^{at} \sin(bt)$.

Exercice 17 Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' - 4y' + 3y = 0$.

Exercice 18 Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + 2y = 0$.

Exercice 19 Déterminer les fonctions solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y = 0$.

3.2 Recherche d'une solution particulière

On recherche une solution particulière de la même façon que pour une equation du premier ordre.

Exercice 20 Soit l'équation différentielle (E) : $\; y" - 4y' + 3y = -3t^2 + 2t$.
Chercher une solution particulière de (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
Déterminer alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 21 Soit l'équation (E) : $\; y" - 4y' + 4y = 3e^{-t}$.
Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(t) = Ae^{-t}$.
Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).

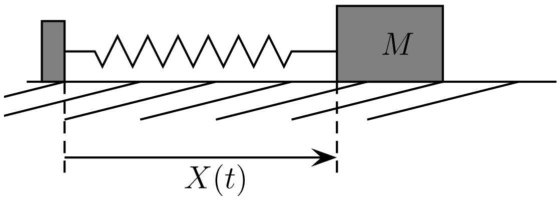
3.3 Solution vérifiant des conditions initiales données

Exercice 22 On considère l'équation différentielle : $(E) : y'' - 3y' + 2y = 4$,
dans laquelle y est une fonction de la variable x.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) sans second membre associée à (E).
2. Déterminer une fonction constante g solution de (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant de plus les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.

Exercice 23 **Objet retenu par un ressort.**
On fixe à l'extrémité d'un ressort horizontal un objet qui peut coulisser sans frottement sur un plan.



On repère l'objet par sa position X qui varie en fonction du temps t.
On admet que la fonction X est solution de l'équation

$$(E) : X'' + 100X = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution de l'équation (E) telle que $X(0) = 10^{-1}$ et $X'(0) = 0$.
3. On admet que si l'objet M frotte sur le plan, l'équation différentielle devient $(E') : X'' + X' + 100 = 0$.

   Résoudre de même (E'), avec les mêmes conditions initiales.
4. Représenter graphiquement les solutions de (E) et (E').

Exercice 24 **Oscillations libres et amorties dans un fluide visqueux.**
L'écart à sa position initiale d'un objet dans un fluide visqueux est une fonction du temps solution de l'équation différentielle

$$(E) : \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière de (E) qui s'annule pour $t = 0$ et dont la dérivée vaut 4 pour $t = 0$.

Exercice 25 **Oscillations forcées et amorties dans un fluide visqueux.**
L'objet de l'exercice précédent, toujours dans le même fluide visqueux, est maintenant soumis à une excitation entretenue.
L'écart de l'objet à sa position initiale est alors solution de l'équation différentielle

$$(E) : \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 10\cos(2t)$$

1. Montrer que la solution g définie par $g(t) = 2\sin(2t) - \cos(2t)$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).
3. Déterminer la solution f de (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

III - Problèmes complets

Exercice 26 **Partie A. Résolution d'une équation différentielle**
On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = x$ où y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_0) : y' + y = 0$.
2. Rechercher une fonction affine solution particulière de (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B. Etude de la solution.

On étudie la fonction f trouvée ci-dessus, définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par $f(x) = 2e^{-x} + x - 1$.

1. Calculer la dérivée f' de f.

   Etudier son signe et dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-1)$.

   On note Δ la droite d'équation $y = x - 1$. Interpréter graphiquement le résultat précédent, puis tracer Δ et l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 27 **Problème d'isolation.**

Pour tester la résistance d'une plaque d'isolation phonique à la chaleur, on porte sa température à 100°C et on étudie l'évolution de sa température en fonction du temps.

On note $\theta(t)$ la température de la plaque, en degré Celsius, à l'instant t, en minutes.

La température ambiante est de 19°C et après 6 minutes la température est redescendue à 82°C.

On admet que la fonction θ est solution de l'équation différentielle $(E) : y' + 0,042y = 0,798$.

Partie A.

1. Rechercher une fonction constnate solution particulière de (E).

   Donner alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).
2. D'après l'énoncé, que vaut $\theta(0)$, la température initiale de la plaque.

   En déduire la solution particulière de (E) donnant la température de la plque en fonction du temps.

Partie B.

1. Calculer la température de la plaque après 35 minutes.
2. Calculer la dérivée θ' de θ. En déduire le sens de variation de *theta* sur $[0; +\infty[$.
3. Calculer la limite de $\theta(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
4. Représenter graphiquement la fonction θ.
5. Calculer le temps à partir duquel la température de la plaque est inférieure à 30°C. Vérifier graphiquement ce résultat.