Calcul intégral

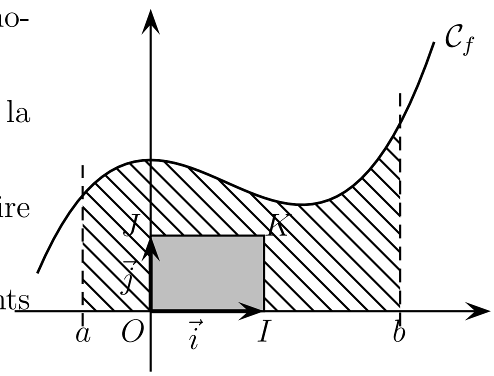
I - Aire sous une courbe : Intégrale d'une fonction continue positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On cherche à déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ situé sous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.

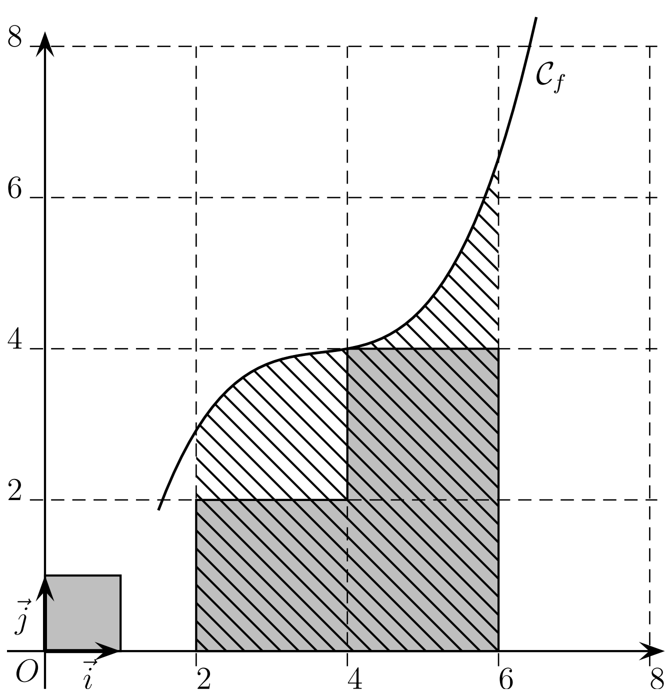
L'unité d'aire est donnée par le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$: l'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$.

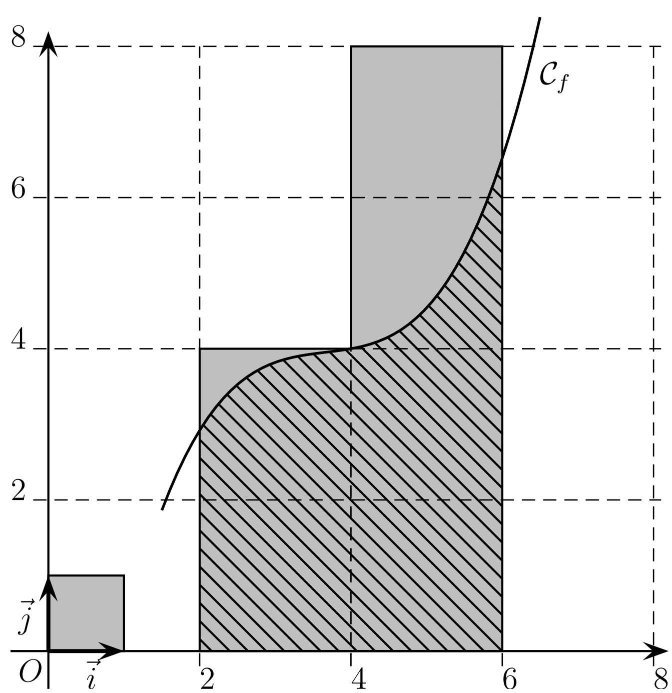
Plus précisément, le domaine $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $a \leq x \leq b$, et $0 \leq y \leq f(x)$.



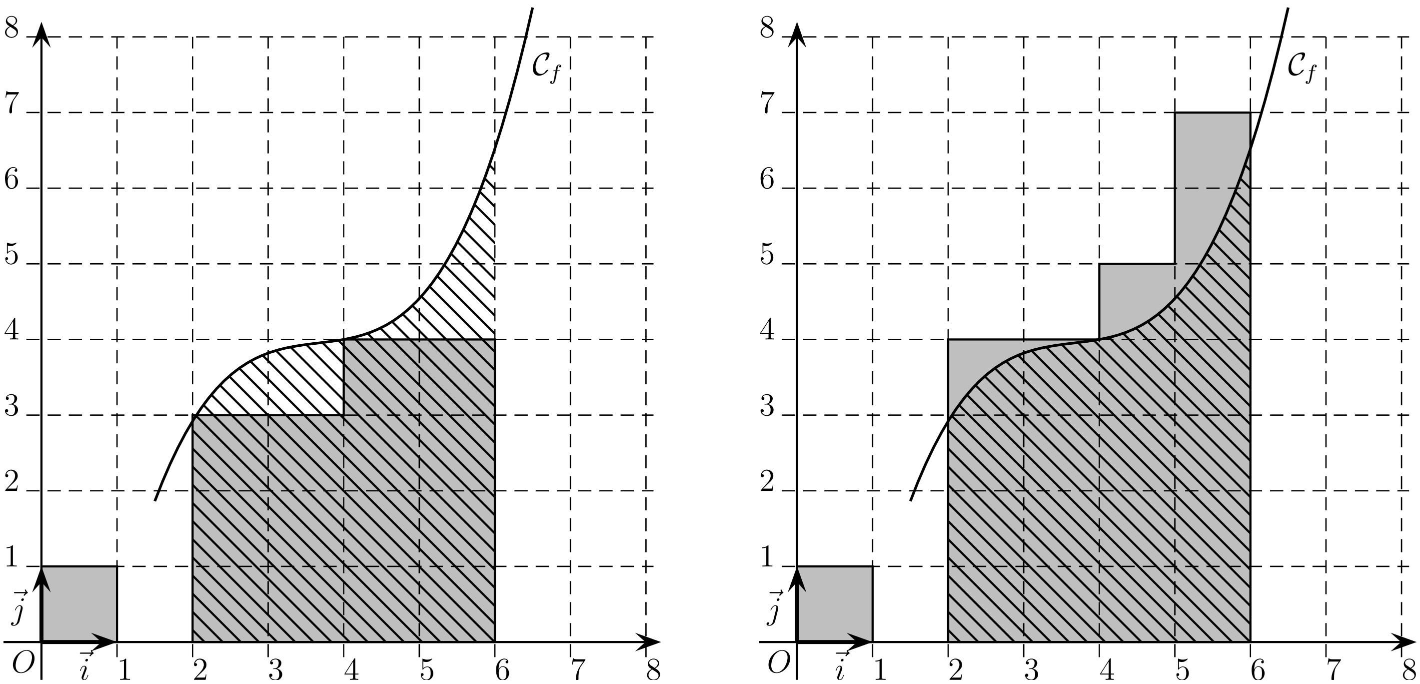
Cette aire s'appelle **l'intégrale de la fonction f de a à b** ; on la note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Les graphiques suivants donnent la courbe représentative d'une fonction f. Déterminer dans chacun des cas un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_2^6 f(x)dx$.

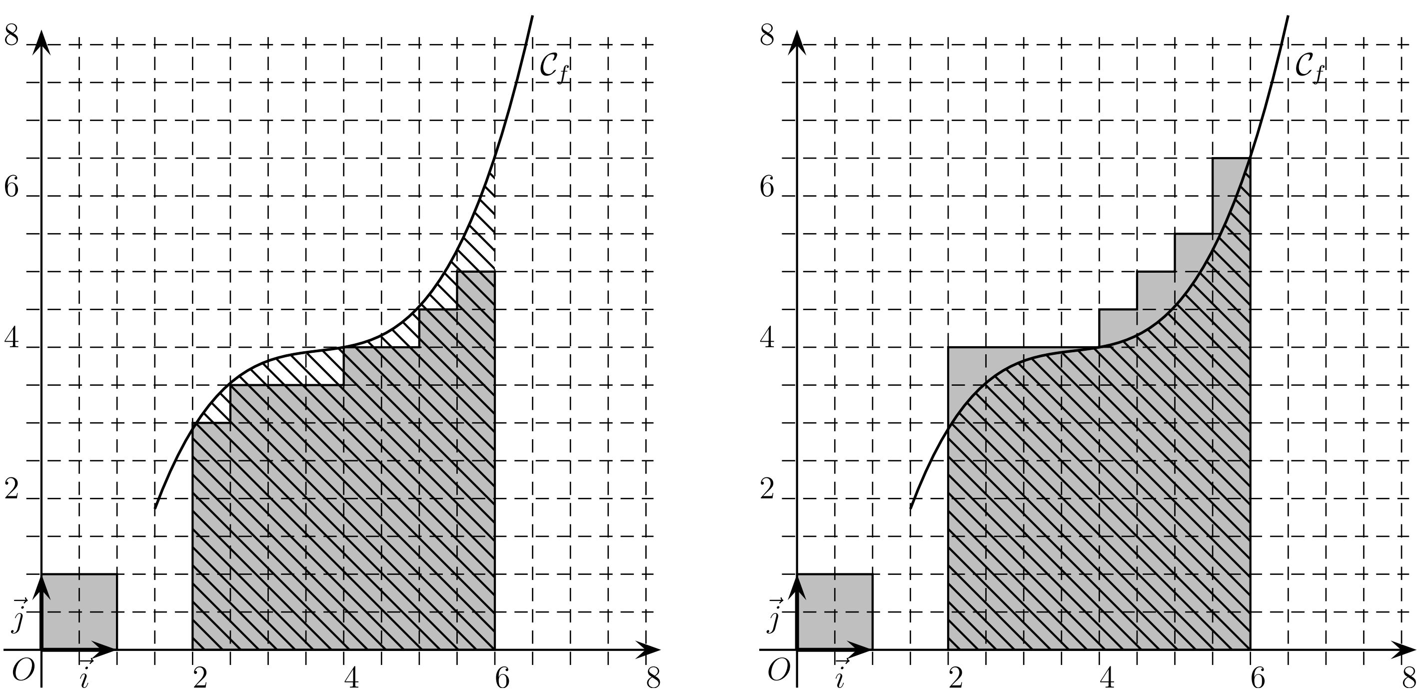




$$\cdots \leq \int_2^6 f(x)dx \leq \dots$$



$$\cdots \leq \int_2^6 f(x)dx \leq \ldots$$



$$\cdots \leq \int_2^6 f(x)dx \leq \ldots$$

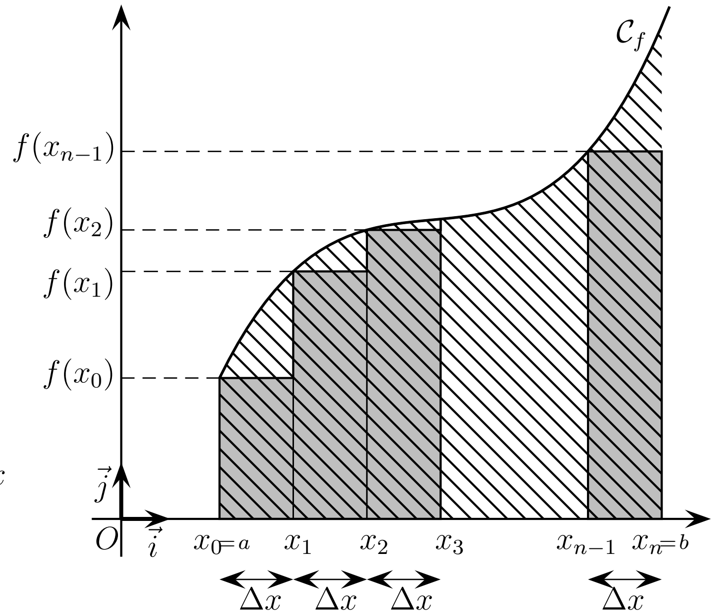
La situation précédente est généralisable : soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$.

On découpe l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de longueurs $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$:

$$[x_0; x_1] \ ; \quad [x_1; x_2] \ ; \quad [x_2; x_3] \ ; \quad \dots \ ; [x_{n-1}; x_n]$$

La $k^{\text{ème}}$ abscisse du découpage est $x_k = x_0 + k\Delta x$. L'aire grisée est la somme des aires de chaque rectangle :

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ \dots \ + f(x_{n-1})\Delta x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x \end{aligned}$$



On montre que cette suite (S_n) converge vers une limite qui est l'aire hachurée et recherchée : l'intégrale de f de a à b.

<u>Remarque :</u> La notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ (introduite par Leibniz, et/ou Newton, au XVIIe siècle) s'explique à partir des calculs d'aire précédents, à la limite où $n \to +\infty$, donc $\Delta x \to 0$, noté finalement dx (largeur infinitésimale), et le symbole $\sum$ se transformant en $\int$: $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$

Exercice 1 Calculer les intégrales : $I = \displaystyle\int_0^1 x\,dx$, $J = \displaystyle\int_1^3 (2t+1)\,dt$, et $K = \displaystyle\int_{-2}^3 (-x+3)\,dx$.

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = 2x + 3$.

Déterminer de façon explicite, pour tout réel $t \geq 0$, la fonction $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$.

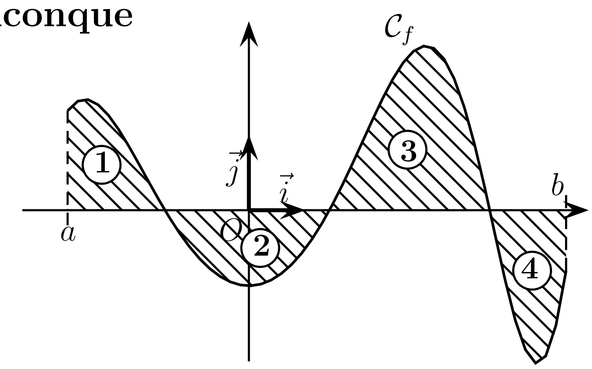
II - Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

D'une manière plus générale, l'intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ est l'aire **algébrique** du domaine compris entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

1) Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Pour une fonction f continue de signe quelconque sur un intervalle $[a; b]$, l'intégrale de f est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels f garde un signe constant.

$$\int_a^b f(x)dx = \text{aire}\,(\mathcal{D}_1) - \text{aire}\,(\mathcal{D}_2) + \text{aire}\,(\mathcal{D}_3) - \text{aire}\,(\mathcal{D}_4)$$



On convient de plus que : $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Définition *Soit f continue sur $[a;b]$, avec $a<b$, alors* **la valeur moyenne** *de f sur $[a;b]$ est :*

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exercice 3 Calculer la valeur moyenne sur $I=[0;4]$ de la fonction f définie par $f(x)=2x-3$.

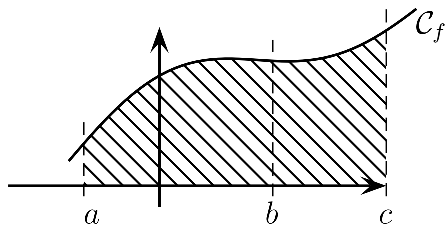
III - Propriétés de l'intégrale

Propriété **Linéarité** *Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a;b]$ et tout réel λ,*

$$\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Propriété **Relation de Chasles** *Pour tous réels a, b et c,*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$



Propriété **Positivité** *Si pour $x\in[a;b]$,*

- $f(x)\geq 0$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- $f(x)\leq 0$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

Corollaire *Soit f et g telles que, pour tout x de $[a;b]$, $f(x)\leq g(x)$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

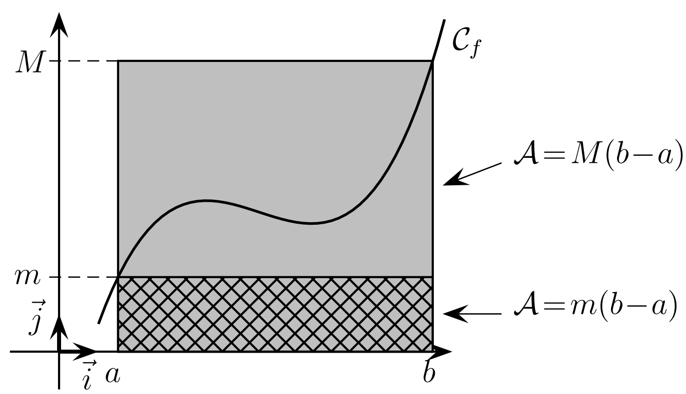
Propriété **Inégalités de la moyenne**

Soit f telle que, pour tout $x\in[a;b]$,

$$m \leq f(x) \leq M$$

alors $$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

ou encore $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$



Exercice 4 f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$.

a) Dresser le tableau de variations de f sur $[1;2]$ et tracer l'allure de la courbe représentative de f.

b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x^2}\,dx$.

c) Donner, de même que précédemment, un encadrement de $\displaystyle\int_1^3 \frac{e^x}{x^2}\,dx$.

IV - Primitive d'une fonction

Définition *Une* **primitive de f sur** *I est une fonction F dérivable sur I dont la dérivée F' est f.*

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 2$.
Les primitives de f sont les fonctions $F(x) =$:pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.

Exercice 6 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- $f(x) = 3x^2 + x - 6$
- $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$
- $h(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$
- $k(x) = 2x + \sin(x)$

Propriété *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

- *On suppose que F est une primitive de f sur I. Alors, l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I par $G = F + k$, où k est un réel.*
- *Si de plus $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, alors, il existe une* **unique** *primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.*

Exercice 7 Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$ telle que $F(1) = 0$.

Exercice 8 Déterminer la primitive G de $g : x \mapsto 12x^5 - 9x^2 + 6x - 3$ telle que $G(0) = 4$.

Exercice 9 Déterminer la primitive H de $h : x \mapsto \dfrac{4}{(2x+1)^2}$ telle que $H\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$.

V - Intégrales et primitives

Théorème *La fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est* **l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.**

Exercice 10 Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$. Déterminer le sens de variation de F.

Propriété *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, et F une primitive de f, alors,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

VI - Calcul d'intégrale

1) Recherche de primitive

Exercice 11 Déterminer les primitives des fonctions suivantes puis calculer les intégrales :

a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + \dfrac{7}{3}x + 2$ et $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ b) $g(x) = -\sin(x) + 2\cos(x)$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi g(x)\,dx$

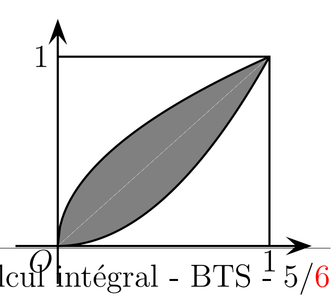
c) $h(x) = 2x - 4 + \dfrac{3}{x^2}$ et $K = \displaystyle\int_1^2 h(x)\,dx$ d) $k(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$ et $L = \displaystyle\int_{-1}^1 k(x)\,dx$

e) $l(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{x^2+9}}$ et $M = \displaystyle\int_0^4 l(x)\,dx$ f) $m(x) = e^{3x}$ et $N = \displaystyle\int_0^4 m(x)\,dx$

Exercice 12 Dans un repère orthonormé, on considère le domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.

Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

(On pourra se rappeler que $\sqrt{x} = x^{1/2}$)



Exercice 13 Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :
a) $f(x)=(2-x)(x-1)$ sur $[-1;0]$ b) $g(x)=e^{-3x+1}$ sur $[-1;1]$. c) $h(t)=3\cos(0,2t)$ sur $[0;1]$

Exercice 14 La courbe décrite par un fil suspendu par ses deux extrémités s'appelle une chaînette. On admet que la chaînette est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}$.

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère.
2. A quelle hauteur est suspendu le fil à ses deux extrémités (en $x=-1$ et $x=1$) ?
   La flèche prise par le fil est la hauteur entre ses points d'attache et le point le plus bas du fil. Quelle est la flèche pour ce fil ?
3. La longueur de la courbe représentative de f est donnée par $L=\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$.

   a) Vérifier que, pour tout $x\in[-1;1]$, $1+[f'(x)]^2=\left(\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right)^2$.

   b) En déduire que $L=\dfrac{e^2-e^{-2}}{2}$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette longueur.

2) Intégration par parties

Théorème *Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $I=[a;b]$, alors,*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Exercice 15 Calculer les intégrales suivantes :
- $I=\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin(x)dx$ • $J=\displaystyle\int_0^3 xe^x\,dx$ • $K=\displaystyle\int_0^2(1+t)e^{-t}dt$ • $L=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos(2t)dt$