Exercice 1 - Session 2012 **10 points**

Partie A

1. (a) La probabilité qu'une pièce prélevée soit conforme est :

$$\begin{aligned} P(14,3 \leqslant X \leqslant 15,5) &= P\left(\frac{14,3-15}{0,35} \leqslant \frac{X-15}{0,35} \leqslant \frac{15,5-15}{0,35}\right) \\ &\simeq P\left(-2 \leqslant \frac{X-15}{0,35} \leqslant 1,43\right) \\ &\simeq \Pi(1,43) - \Pi(-2) \\ &\simeq \Pi(1,43) - (1-\Pi(2)) \\ &=\simeq \Pi(1,43) + \Pi(2) - 1 \simeq 0,924 + 0,977 - 1 \simeq 0,901 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(15-h \leqslant X \leqslant 15+h) = 0,95 &\iff = P\left(\frac{-h}{0,35} \leqslant \frac{X-15}{0,35} \leqslant \frac{h}{0,35}\right) = 2\Pi\left(\frac{h}{0,35}\right) - 1 = 0,95 \\ &\iff \Pi\left(\frac{h}{0,35}\right) = \frac{0,95+1}{2} = 0,975 \\ &\iff \frac{h}{0,35} = 1,96 \iff h \simeq 0,686 \end{aligned}$$

(c) Il y a 95 % de chances qu'une pièce fabriquée avec cette machine réglée ainsi ait une épaisseur qui s'écarte de moins de $h \simeq 0,686$ mm de la valeur moyenne $m = 15$ millimètres souhaitée.

2. On cherche l'écart type σ tel que : $P(14,3 \leqslant X \leqslant 15,5) = 90\,\%$ soit :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{14,3-14,9}{\sigma} \leqslant \frac{X-14,9}{\sigma} \leqslant \frac{15,5-14,9}{\sigma}\right) = 0,9 &\iff P\left(-\frac{0,6}{\sigma} \leqslant \frac{X-14,9}{\sigma} \leqslant \frac{0,6}{\sigma}\right) = 0,9 \\ &\iff 2\Pi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right) - 1 = 0,9 \\ &\iff \Pi\left(\frac{0,6}{\sigma}\right) = 0,95 \\ &\iff \frac{0,6}{\sigma} = 1,65 \iff \sigma = \frac{0,6}{1,65} \simeq 0,36 \end{aligned}$$

Partie B

1. $n = 50$, et $p = 1 - 90\,\% = 0,1$: probabilité pour qu'une pièce prise au hasard soit non conforme.
2. La probabilité pour qu'il y ait exactement 2 pièces non conformes est :

$$P(Y=2) = C_{50}^2 \times 0,1^2 \times 0,9^{48} \simeq 0,08$$

3. (a) La probabilité $P(Y=0)$ doit être la même pour les deux lois. Ainsi,

$$P(Y=0) = e^{-\lambda} = 0,9^{50} \iff \lambda = -\ln\left(0,9^{50}\right) = -50\ln(0,9) \simeq 5,27$$

(b) En utilisant la loi de Poisson, la probabilité que le lot contienne au plus deux pièces non conformes est :

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant 2) &= P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) \\ &= e^{-5} + e^{-5} \times (-5) + \frac{e^{-5} \times (-5)^2}{2} \simeq 0,06 = 60\,\% \end{aligned}$$

Partie C

1. $P\left(A \cap \overline{C}\right) = 40\,\% \times 10\,\% = 4\,\% = 0,04$

	C	$\overline{C}$	
A	0,36	0,04	0,4
$\overline{A}$	0,58	0,02	0,6
	0,94	0,06	1

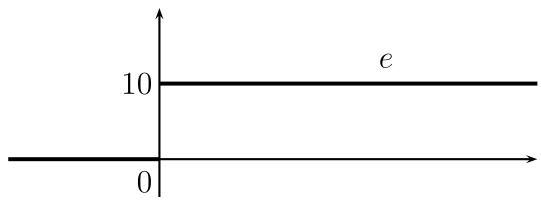
3. $P_C(A) = \dfrac{P(A\cap C}{P(C)} = \dfrac{0,36}{0,94} \simeq 0,38$

4. $P(A) = 0,4 \neq P_C(A)$: les événements A et C ne sont donc pas indépandants.

Exercice 2 - Session 2012 **10 points**

Partie A

1. (a)



   (b) $E(p) = 10 \times \dfrac{1}{p} = \dfrac{10}{p}$

2. En appliquant la transformée de Laplace à $(\mathcal{E})$, on obtient :

$$\begin{aligned} RC\left(pV(p) - v(0)\right) + V(p) = E(p) = \frac{10}{p} &\iff V(p)\left(RCp+1\right) = \frac{10}{p}\text{ , car } v(0)=0 \\ &\iff V(p) = \frac{10}{p(RCp+1)} \end{aligned}$$

3. (a)

$$\frac{10}{p} - \frac{10}{p+\frac{1}{RC}} = \frac{10\left(p+\frac{1}{RC}\right) - 10p}{p\left(p+\frac{1}{RC}\right)} = \frac{\frac{10}{RC}}{p\left(p+\frac{1}{RC}\right)} = \frac{10}{p\left(RCp+1\right)} = V(p)$$

   (b) En appliquant alors la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$v(t) = 10\mathcal{U}(t) - 10e^{-\frac{t}{RC}}\mathcal{U}(t) = 10\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\mathcal{U}(t)$$

Partie B

1. $$T(\omega) = \frac{R}{R} \times \frac{\frac{1}{jRC\omega}}{1+\frac{1}{jRC\omega}} = \frac{\frac{1}{jRC\omega}}{1+\frac{1}{jRC\omega}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{jRC\omega}}+1} = \frac{1}{jRC\omega+1} = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}+1}$$

2. On a : $T(\omega_0) = \dfrac{1}{1+j}$, d'où $|T(\omega_0)| = \dfrac{1}{|1+j|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\arg\left(T(\omega_0)\right) = -\arg(1+j) = -\dfrac{\pi}{4}$

3. (a) $|T(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ (b) $\arg\left(T(\omega)\right) = -\arg\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) = -\arctan\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$

De même, au 2. $\arg(T(\omega_0)) = -\dfrac{\pi}{4}$, et d'après 3b $\arg(T(\omega_0)) = -\arctan(1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Les résultats de ces deux questions concordent bien.

5.
$$G_{db}(\omega_0) = \frac{20}{\ln(10)}\ln\left(|T(\omega_0)|\right) = \frac{20}{\ln(10)}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = -10\frac{\ln 2}{\ln 10} \simeq -3$$

6. (a) $\varphi(\omega_0) = -\arctan\left(\dfrac{\omega_0}{500}\right) = -\arctan(1) = -\dfrac{\pi}{4}$

   (b) Voir graphique.

   (c) Le point M_0 a pour abscisse $\varphi(\omega_0) = \varphi(500) = -\dfrac{\pi}{4} \simeq -0,785$.

   L'ordonnée du point est alors graphiquement environ -3 (que l'on avait précédemment par le calcul : $G_{db}(500)) \simeq -3$).

7. L'absisse du point M_1 et inférieure à celle du point M_0, et on a donc $\varphi(\omega) < \varphi(\omega_0)$, soit, comme φ est strictement décroissante, $\omega > \omega_0 = 500$.