Brevet de technicien supérieur
session 2013 - groupement A

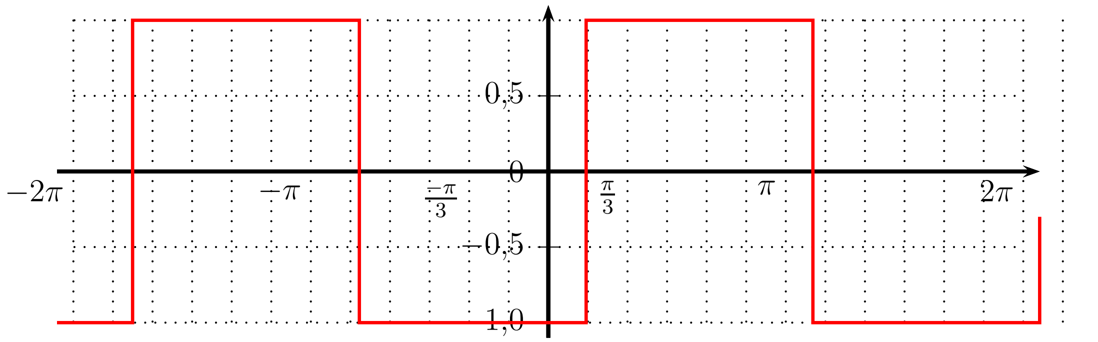
Exercice 1 — **10 points**

Partie A

1. Tableau des valeurs prises par $f\left(t+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ pour certaines valeurs de t

t	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
$f\left(t+\frac{4\pi}{3}\right)$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1

Représentation graphique de $t \mapsto f\left(t+\dfrac{4\pi}{4}\right)$



2. (a) On a $S(0)=f(0)+f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$ et donc, $S(0)=-1$.

   (b) A $t=0$, $S(0)\neq 0$ et donc on n'a pas pour tout t, $S(t)=0$, et le système triphasé n'est pas équilibré.

Partie B

1. f est paire, et donc, $a_0=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\,dt$, avec $T=2\pi$, d'où $a_0=\dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,dt$.
   On peut calculer l'intégrale graphiquement : c'est l'aire algébrique comprise entre l'axe des abscisses et la courbe de f : $a_0=\dfrac{2}{2\pi}\left(1\times\dfrac{\pi}{3}+(-1)\times\dfrac{\pi}{3}\right)=0$.
2. Comme f est paire, on a, pour tout entier n non nul $b_n=0$.
3. (a) • Sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{3}\right[$, $g(t)=1$
   • Sur $\left]\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right[$, $g(t)=0$
   • Sur $\left]\dfrac{2\pi}{3}\,;\pi\right[$, $g(t)=-1$

   (b) On a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,dt\\
&= \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} g(t)\cos(nt)\,dt\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(nt)\,dt+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}0\,dt+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(-\cos(nt))\,dt\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+0+\left[-\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\right)\\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)
\end{aligned}$$

1. (a) Pour $n = 3k$, on a a_{3k} …

et, comme pour tout entier k, $sin(k\pi) = \sin(2k\pi)$, on a donc $a_{3k} = 0$

   (b) L'amplitude des harmoniques de rang multiple de 3 est a_{3k} et est donc nulle d'après le calcul précédent. Ainsi, le système triphasé est équilibré.

Exercice 2 — **10 points**

Partie A

1. On recherche une solution y constante, soit $y(t) = K$ et donc, $y'(t) = 0 = y''(t) = 0$.
   En remplaçant dans l'équation (E), on obtient $0,25K = 2,5 \iff K = 10$.
   Une solution constante de (E) est donc, $y(t) = 10$.

2. L'équation caractéristique associée à (E_0) s'écrit $r^2 + r + 0,25 = 0$, c'est-à-dire $(r + 0,5)^2 = 0$.
   Elle admet donc une racine double $r = -0,5$.
   Les solutions de (E_0) s'écrivent alors $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{-0,5t}$, avec λ et μ réels.

3. La solution générale de l'équation (E) s'obtient en ajoutant la solution générale de l'équation homogène associée (E_0) trouvée précédemment et une solution particulière de (E), par exemple la solution constante trouvée à la question 1.

$$y(t) = 10 + (\lambda t + \mu)e^{-0,5t} \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels}$$

4. Les deux premières propositions ne sont pas de la forme générale trouvées précédemment, et ne peuvent donc pas convenir.
   Pour les deux dernières, il reste à vérifier que $s(0) = s'(0) = 0$.
   Si $s(t) = 10 - (5t + 10)e^{-0,5t}$, alors, $s(0) = 10 - (10) \times 1 = 0$, et
   $s'(t) = 0 - \Big((5)e^{-0,5t} - 0,5(5t + 10)e^{-0,5t}\Big)$, d'où $s'(0) = -\Big(5 - 0,5 \times 10\Big) = 0$.
   Cette fonction convient donc bien (et comme on sait de plus que la solution d'une telle équation différentielle avec ces conditions initiales est unique, c'est bien la seule solution possible).
   La bonne réponse est donc : $s(t) = 10 - (5t + 10)e^{-0,5t}$

Partie C

1. On a : $\mathcal{L}\Big(s''(t)\Big) = p^2S(p) - ps(0) - s'(0) = p^2S(p)$ car $s(0) = s'(0) = 0$ et d'autre part

$$\mathcal{L}\Big(sin(2t)U(t)\Big) = \frac{2}{p^2 + 4}$$

   d'où, en prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle,

$$p^2S(p) + 9S(p) = \times\frac{2}{p^2 + 4} \iff (p^2 + 9)S(p) = \frac{18}{p^2 + 4}$$

   soit $S(p) = \dfrac{18}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}$.

2. On a, en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{a}{p^2 + 4} + \frac{b}{p^2 + 9} = \frac{a(p^2 + 9) + b(p^2 + 4)}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)} = \frac{(a + b)p^2 + 9a + 4b}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}$$

   Par identification avec la relation demandée, on obtient alors le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 0 \\ 9a & + & 4b & = & 18 \end{array}\right.$,
   d'où $a = -b = \dfrac{18}{5}$, et donc, $S(p) = \dfrac{18}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)} = \dfrac{18}{5}\left(\dfrac{1}{p^2 + 4} - \dfrac{1}{p^2 + 9}\right)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p^2+4}\Big) = \frac{1}{2}\sin(2t)U(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p^2+9}\Big) = \frac{1}{3}\sin(3t)U(t)$$

et donc, $s(t) = \dfrac{18}{5}\left(\dfrac{1}{2}\sin(2t) - \dfrac{1}{3}\sin(3t)\right)U(t) = \left(\dfrac{9}{5}\sin(2t) - \dfrac{6}{5}\sin(3t)\right)U(t)$,
soit aussi, $\quad s(t) = (1,8\sin(2t) - 1,2\sin(3t))\,U(t)$.

Partie C

1. On lit graphiquement $A \simeq 2,9$.
2. Pour tout réel $t \geqslant 0$, $f'(t) = 3,6\,(\cos(2t) - \cos(3t))$.
3. (a) A l'aide des formules trigonométriques du formulaire :

$$\begin{aligned}\cos(2t) - \cos(3t) &= -2\sin\left(\frac{2t+3t}{2}\right)\sin\left(\frac{2t-3t}{2}\right)\\ &= -2\sin\left(\frac{5t}{2}\right)\sin\left(\frac{-t}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{5t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\end{aligned}$$

d'où $f'(t) = 7,2\sin\left(\dfrac{5t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

On a alors, pour tout entier k, $f'\left(\dfrac{2k\pi}{5}\right) = 7,2\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}\sin\left(\dfrac{k\pi}{5}\right) = 0$.

(b) Les extrema locaux sont donc atteints pour $t = \dfrac{2k\pi}{5}$ et correspondent donc aux points M_1,M_2, M_3 et M_4.

- L'abscisse de M_1 est $\dfrac{2\pi}{5}$ $\quad (k=1)$
- L'abscisse de M_2 est $\dfrac{4\pi}{5}$ $\quad (k=2)$
- L'abscisse de M_3 est $\dfrac{6\pi}{5}$ $\quad (k=3)$
- L'abscisse de M_4 est $\dfrac{8\pi}{5}$ $\quad (k=4)$

(c) C'est le point M_3 qui correspond à l'amplitude maximale, donc

$$A = f\left(\frac{6\pi}{5}\right) = 1,8\sin(2,4\pi) - 1,2\sin(3,6\pi)A \simeq 2,853$$